Matematyka Dyskretna II

Zestaw Zadań #10

Na: środa, 15 grudnia

1. Niech $K_n^{(r)}$ będzie r-jednolitym hipergrafem pełnym na n wierzcholkach, tzn. o $\binom{n}{r}$ krawędziach, $n > r > 1$. Wyznacz $\nu(K_n^{(r)})$ and $\tau(K_n^{(r)})$.

2. Mówimy, że $\mathcal{F}$ jest *maksymalną rodziną przecinającą się*, gdy dla każdego $B \notin \mathcal{F}$, $B \subset X$, rodzina $\mathcal{F} \cup \{B\}$ nie jest przeinająca się, tzn., istnieje $A \in \mathcal{F}$, takie że $A \cap B = \emptyset$. Mówimy także, że $\mathcal{F}$ jest *rodziną rosnącą*, jeśli jest zamknieta na branie nadzbiorów, tzn., dla każdego $A \in \mathcal{F}$ i $B \supset A$, mamy $B \in \mathcal{F}$. Wykaż, że każda maksymalna rodzina przecinająca się $\mathcal{F}$ jest rosnąca i wywnioskuj z tego, że $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$.

3. Jeśli $r \leq n/2$ oraz rodzina $\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{r} \binom{X}{k}$ jest przecinającym się SS, to $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{r-1}$. Wskaz.: wykorzystaj skojarzenia w kracie boolowskiej miedzy poszczególnymi poziomami (tak jak w dowodzie Tw. Spernera).

4. Znajdź dwie różne największe rodziny przecinające się złożone z 3-elementowych podzbiorów zbioru $X = \{1, \ldots, 6\}$. Czy da się to zrobić dla $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

5. Wykaż, że dla $n \geq 2r + 1$,

   (i) Każda n-elementowa permutacja „wokół stołu” zawiera co najwyżej r zbiorów z danej r-jednolitej rodziny przecinającej się.

   (ii) A jeśli zawiera dokładnie r z nich, to ich suma tworzy segment długości $2r - 1$.

   (iii) Korzystając z części (ii), dokończ dowód Tw. Erdősa-Ko-Rado, część (ii), w przypadku gdy $\{c_1, \ldots, c_{r-1}\} \cap \{a_1, \ldots, a_{2r-1}\} \neq \emptyset$.

6. Wykaż, że dla $n \geq 2r + 1$ każda rodzina $\mathcal{F}_x^{(r)}$, gdzie $x \in [n]$, jest maksymalną rodziną przecinającą się.