ZAD 1

$V = \{ \text{parz. podzbiory } [5] \}$

$\chi(A,B) = 3$ gdy $|A \triangle B| = 4$

Przyp., że $A, B, C \in V$ tworzą trójkąt

i $\chi(A,B) = \chi(A,C) = \chi(B,C) = 3$.

Tzn., że $|A \triangle B| = |B \triangle C| = 4$, ale

$$|A \triangle C| = |(A \triangle B) \triangle (B \triangle C)| = 2 \ \lightning$$

jak to najprościej udowodnić?

Można też rozważyć wszystkie kombinacje zb. mocy 0, 2, 4 i kolejno wykluczać.

Np. gdy $A = \emptyset \Rightarrow |B| = |C| = 4 \Rightarrow |B \triangle C| = 2 \ \lightning$

Gdy $|A| = |B| = 2 \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow C$?

itd...

ZAD 2 Indukcja wzgl. $k+l$

Jeśli np. $k=2$, to $R(2,l)=l$ i $\binom{2+l-2}{2-1}=l$ ✓

Zał., że $k,l \geq 3$ i że nierówność zachodzi dla $k+l-1$

$$R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$$

$$\leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$$

~~T~~ożsamość Pascala

Zad 3

$$n = \lfloor c k 2^{k/2} \rfloor, \quad c < \frac{1}{e\sqrt{2}}$$

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \left(\frac{en}{k}\right)^k 2^{1-\binom{k}{2}}$$

$$\leq \left(ec2^{k/2}\right)^k 2^{1-\binom{k}{2}} = 2\left(ec\sqrt{2}\right)^k < 1$$

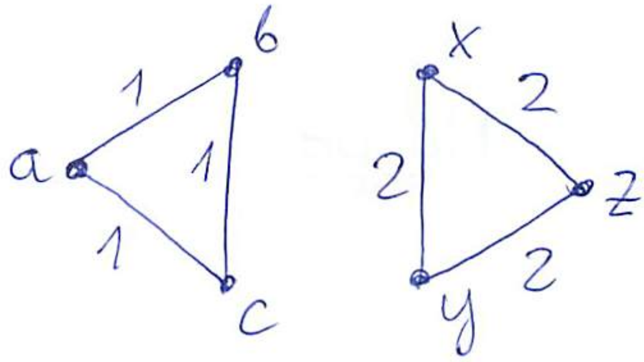
dla dost. dużych k.

Można inaczej:

$$n = \left\lfloor \frac{k}{e\sqrt{2}} 2^{k/2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \right\rfloor$$

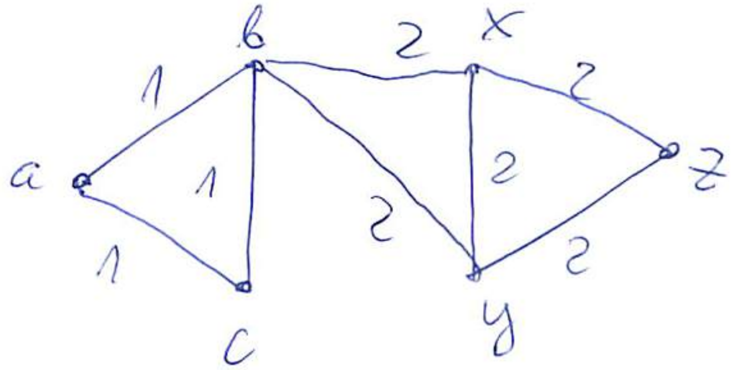
$$\left(\frac{en}{k}\right)^k 2^{1-\binom{k}{2}} \leq 2 \cdot 1 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k < \frac{2}{e} < 1$$

Zad 5

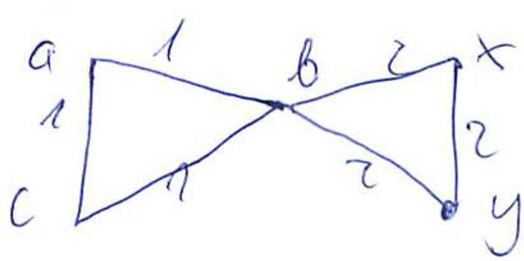


bx lub cx – kolor 2
by lub cy – kolor 2
bz lub cz – kolor 2

Z zas. szufl., 2 z x, y, z są poł. kolorem 2
z tym samym spośród b, c
B.s.o., niech bx, by – kolor 2



⇒ abcxy tworzą muszkę

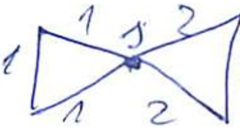


ZAD 4 $\quad R(2K_3) \leq 10$

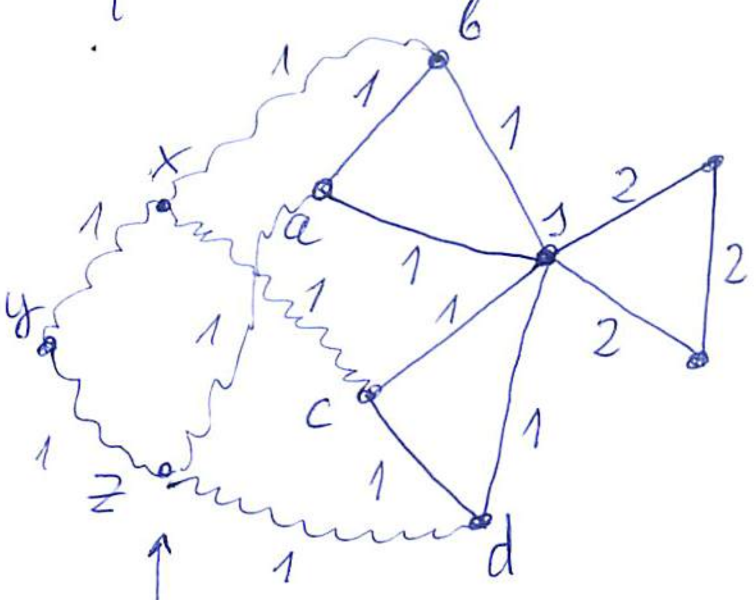
$\forall \chi : \binom{[10]}{2} \to [2]\ \exists$ 2 rozł. monochr. $\triangle$

(stosujemy 2 razy $6 \to (3)$)

Jeśli są tego samego koloru, to amen.

Jeśli nie, to z Zad 5., $\exists$ 1  2 (muszka)

Pozostałe 5 wierzch. wraz ze środkiem muszki tworzą K_6, więc tam znowu jest monochr. $\triangle$ (musi zawierać środek)



Patrzymy na 5-ki:

a b x y z

c d x y z

Jeśli tam nie ma monochr. $\triangle$, to każdy kolor musi tworzyć C_5.

$\left.\begin{matrix} xa\ xd \\ ya\ yb\ yc\ yd \\ zb\ zc \end{matrix}\right\}$ kolor 2

1) ad − 2 ⇒ ady − $\triangle$ kol. 2
2) bc − 2 ⇒ bcy − $\triangle$ kol 2
3) ad, bc − 1 ⇒ adz, bcx − $\triangle\triangle$ kol. ~~2~~ 1