Zad 1 a) $s(r) \geq \frac{1}{2}(3^r+1)$

Indukcja po r: $s(1)=2$, $s(2)=5$ – oba OK

Zał., że $r \geq 2$ i $s(r) \geq \frac{1}{2}(3^r+1)$.

Niech $n := s(r)$, $\chi : [n-1] \to \{c_1, \dots, c_r\}$

χ – kolorowanie bez trójki Schura monochr.

Niech $\chi' : [3n-2] \to \{c_1, \dots, c_r, c_{r+1}\}$ takie, że

$\chi'(i) = \chi(i)$ dla $i \in [n-1]$

$\chi'(i) = c_{r+1}$ dla $n \leq i \leq 2n-1$

$\chi'(i) = \chi(i-(2n-1))$ dla $2n \leq n \leq 3n-2$.

Łatwo sprawdzić, że w tym kolorowaniu nie ma monochr. trójki Schura. Zatem

$$s(r+1) \geq 3n-1 = 3s(r) - 1 \underset{\text{z zał. ind.}}{\geq} \frac{3}{2}(3^r+1) - 1 = \frac{3^{r+1}+1}{2}$$

$\square$

b) $s(r) \leq 3r! - 1$

Z dowodu Tw. Schura wiemy, że $s(R) \leq R(3;r)$

Z rekurencji na $R(l_1, \dots, l_r)$ mamy

$R(3;r) \leq r R(\underbrace{3, \dots, 3}_{r-1}, 2) = r R(3; r-1)$.

Teraz przez ind. po r pokazujemy, że $R(3;r) \leq 3r!$. (Uwaga: war. począt. $R(3,3) = 6 \leq 3 \cdot 2!$

$\square$

Zad2 Jak w dowodzie Tw. Rado,

$\forall j \in \mathbb{N}: j = 5^{\alpha_j}(5\beta_j + \gamma_j)$, $1 \le \gamma_j \le 4$,

kolorujemy $\chi(j) = \gamma_j$.

Przyp. że $\exists\, x, y, z$ w kolorze γ, $x+y=3z$.

Wtedy $5^{\alpha_x}(5\beta_x+\gamma) + 5^{\alpha_y}(5\beta_y+\gamma) = 3\cdot 5^{\alpha_z}(5\beta_z+\gamma)$

Podzielmy stronami przez 5^{α}, $\alpha = \min(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$.

Niech $I_x = \begin{cases} 1, & \alpha_x = \alpha \\ 0, & \alpha_x > \alpha \end{cases}$, I_y, I_z - podobnie.

Wtedy $I_x\gamma + I_y\gamma = I_z(3\gamma) \pmod 5$ $/ : \gamma$

$\Rightarrow I_x + I_y = 3 I_z \pmod 5$

co jest możliwe tylko, gdy $I_x = I_y = I_z$ ↯

bo któreś z nich musi $=1$

Zad3 ~~Dwa przypadki~~ Kolorowanie

1	2	3	4	5	6	7	8
R	R	B	B	R	R	B	B

pokazuje, że $W(3,2) \ge 9$. Żeby pok., że $W(3,2) \le 9$, rozważmy 2 przyp.:

I $\chi(1) = \chi(9) \overset{bso}{=} B \Rightarrow \chi(5) = R \overset{bso}{\Rightarrow} \chi(7) = B \Rightarrow \chi(8) = B$
$\Rightarrow \chi(2) = B \Rightarrow \chi(3) = R \Rightarrow \chi(4) = B \Rightarrow AP_3$: 1, 4, 7 koloru B

II bso $\chi(1) = B$, $\chi(9) = R \overset{bso}{\Rightarrow} \chi(5) = R \Rightarrow \chi(7) = B \Rightarrow \chi(4) = R \Rightarrow \chi(6) = B$
$\Rightarrow \chi(8) = R \Rightarrow \chi(2) = B \Rightarrow \chi(3)$ zamyka monochr. AP_3

[można też inaczej - jest wiele dowodów]

Zad4 Spójrzmy tylko na potęgi 2:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1 2 4 8 16 32 64 128 256

$\forall \chi : [256] \to \{R, B\}$, zdef. $\chi' : [9] \to \{R, B\}$ tak, że

$\chi'(i) = \chi(2^{i-1})$. Wiemy, że w χ' jest

monochr. AP_3: x, y, z: $\chi'(x) = \chi'(y) = \chi'(z)$, $x + y = 2z$

$\Rightarrow \chi(2^{x-1}) = \chi(2^{y-1}) = \chi(2^{z-1})$ oraz

$$2^{x-1} \cdot 2^{y-1} = 2^{2z-2} = (2^{z-1})^2$$ czyli

$2^{x-1}, 2^{y-1}, 2^{z-1}$ – tworzą ciąg geom. $\square$

Zad5 ~~Np. W(3,3) ≥ 17, bo~~

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17~~

~~B B R R G G B B R R G G R R G B B~~

Np. $W(3,3) \geq 23$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

R R B B R R B G B G G R G R R B R B B G R G

Można lepiej, bo $W(3,3) = 27$

Zad 6 Pokolorujmy $[n]$ losowo:

$$\Pr(R) = \Pr(B) = \frac{1}{2}.$$

$\forall$ ciągu arytm. $S = AP_k$ dług. k w $[n]$, niech

A_S – zdarzenie, że S jest monochr.

Mamy $P(A_S) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ oraz

$$P\Big(\bigcup A_S\Big) \le \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} < \frac{n^2}{2^k} \le 1$$

po wsz. AP_k w $[n]$

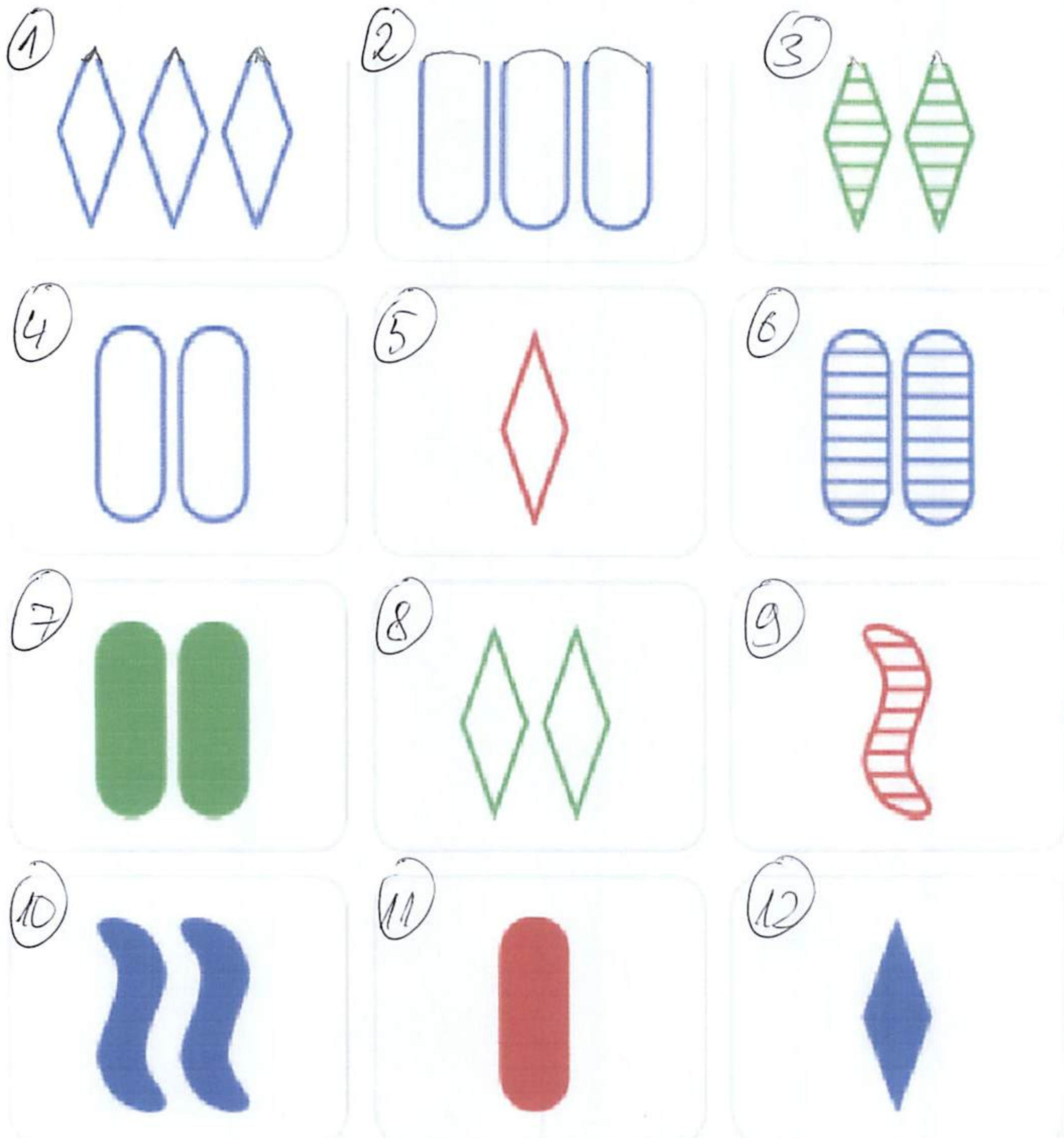
bo pierwsze 2 el. wyznaczają cały AP_k

gdy $n \le 2^{k/2}$

Zatem

$$W(k,2) > 2^{k/2}$$

$\square$



Sety: 5, 9, 11
1, 5, 8
1, 7, 9

Być może jest ich więcej...