4. Zagadnienia pre-ramseyowskie

Tw. 6 (Schur, 1916)

$\forall r \, \exists s \, \forall \chi : [s] \to [r] \, \exists x, y, z \in [s]:$

$$\chi(x) = \chi(y) = \chi(z), \quad \boxed{x + y = z}$$

(monochromatyczna) trójka Schura

Pr. $r = 2$ $\quad \underline{1} \; \overline{2} \; \underline{3} \; 4 \; 5 \ldots$
$\quad\quad\quad 4 = 2 + 2$

lub $\quad \underline{1} \; \overline{2} \; \overline{3} \; \underline{4} \; 5 \ldots$
$\quad\quad\quad 5 = ?$

$s = 5$

$s(2) = 5$, $\quad s(r)$ – liczba Schura

$s(r) = \min\{s : s \text{ spełnia Tw. 6}\}$

Dowód Tw 6

Weźmy s takie, że $s+1 \to (3)_r$

(takie s istnieje na podstawie Tw. Ramsey'a)

$\forall\, \chi : [s] \to [r]$ zdefiniujmy $\chi' : \binom{\{0,\dots,s\}}{2} \to [r]$

poprzez $\chi'(i,j) = \chi(|i-j|)$

Z def. $s+1 \to (3)_r$ wynika, że $\exists\, a<b<c$:

$\chi'(a,b) = \chi'(a,c) = \chi'(b,c) \Rightarrow \chi(|a-b|) = \chi(|a-c|) = \chi(|b-c|)$

Podstawmy $x = b-a$, $y = c-\overset{b}{\cancel{a}}$, $z = c-\cancel{b}^{\,a}$

Wtedy $x+y=z$ & $\chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$

$\square$

Motywacją dla Schura było Wielkie Tw. Fermata:

Równanie $x^r + y^r = z^r$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{Z}$ dla $r \geq 3$

Tw 7 (Schur, 1916)

$\forall\, r \geq 1$ $\forall$ liczby pierwszej $p > s(r)$
$\exists\, x, y, z \in \mathbb{N}$: $x^r + y^r \equiv z^r \pmod p$

dowód: $Z_p^* = [p-1]$ - grupa z mnożeniem modulo p

$H = \{x^r \pmod p : x \in Z_p^*\}$

$\uparrow$

podgrupa rzędu $\dfrac{p-1}{\gcd(r, p-1)}$

Warstwy Z_p^* względem H dzielą Z_p^* na $k = \gcd(r, p-1)$ rozłącznych zbiorów postaci $a_i H$, $a_i \in Z_p^*$, $i = 1, \dots, k$. $\underline{k \leq r}$

<u>Np.</u> $p = 7$, $r = 2$

x	1	2	3	4	5	6
x^2	1	4	2	2	4	1

$H = \{1, 2, 4\}$, $k = \gcd(2, 6) = 2$

Warstwy: $1H = 2H = 4H = \{1, 2, 4\}$ $\quad a_1 = 1$

$3H = 5H = 6H = \{3, 6, 5\}$ $\quad a_2 = 3$

$$Z_p^* = \bigcup_{i=1}^{k} a_i H \text{ — } k\text{-kolorowanie } Z_p^*,$$

$$|Z_p^*| = p - 1 \geq s(r) \geq s(k) \overset{\text{Tw6}}{\Longrightarrow} \exists\, i, a, b, c \in a_i H :$$

$$a + b = c \Rightarrow \exists\, x, y, z \in H : a_i x^r + a_i y^r = a_i z^r$$

$$\Rightarrow x^r + y^r \equiv z^r \pmod p \qquad \big/ \cdot a_i^{-1}$$

<u>Np:</u> $a = b = 2$, $c = 4 \Rightarrow 4^2 + 3^2 \equiv 2^2 \pmod 7$
<u>$i = 1$</u>

$\square$

Równanie Schura $x+y\neq z$

A inne równania? Np. $x+y=2z$ ← AP_3

Tw 8 (Van der Waerden, 1927)

$\forall r\geq 2\ \forall k\geq 3\ \exists n\ \forall \chi:[n]\to[r]$

$\exists$ monochromatyczny ciąg arytm. dł. k (AP_k),

tzn. $\exists i\in[r]\ \exists x_1,\dots,x_k\in[n]$ (parami różne):

$\chi(x_1)=\dots=\chi(x_k)=i$ & $x_2-x_1=x_3-x_2=\dots=x_k-x_{k-1}$

układ $k-2$ równań.

Liczba van der Waerdena

$W(k,r)=\min\{n:$ zachodzi Tw 8$\}$

Pr. $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ \overline{7}\ \overline{8}\ 9\ \dots$?

$W(3,2)\geq 9$ $(=9)$

Dowód $(k=3, r=2)$: $n = 325 = 5(2\cdot 2^5+1)$

Niech $\chi : [325] \to [2]$

$[165] = [5] \cup [6,10] \cup \ldots \cup [161,165]$

$\quad B_1 \quad B_2 \quad \ldots \quad B_{33}$

Są tylko $2^5 = 32$ 2-kolorowania $[5]$

$\Rightarrow \exists\, 1 \le i < j \le 33 : \chi(B_i) = \chi(B_j)$

$B_i \qquad\qquad B_j$

$5i-4,\ 5i-3,\ 5i-2,\ 5i-1,\ 5i\ \ldots\ 5j-4,\ 5j-3,\ 5j-2,\ 5j-1,\ 5j$

a) $R \quad R \Rightarrow B \quad \cdot \quad \cdot \quad R \quad R \quad B$?

$5j-3+(5j-3-(5i-4)) = 10j-5i-2$ "

$5j-2+(5j-2-(5i-2)) = 10j-5i-2$

b) $\cdot \quad R \quad R \Rightarrow B \quad \cdot \quad \cdot \quad R \quad R \quad B \quad \cdot$?

$5j-2+(5j-2-(5i-3)) = 10j-5i-1 = 5j-1+((5j-1)-(5i-1))$

c) $R \cdot R \cdot B \qquad R \cdot R \cdot B$

$10j-5i \le 330-5 = 325$

Tw 9 (wspólne uog. Schura i V.d.W.)

$\forall k, r, s \geq 1 \ \exists n : \forall [n] \to [r] \ \exists a, d \geq 1 :$
$\{\underbrace{a, a+d, \ldots, a+kd}_{AP_{k+1}}, sd\}$ jest monochromatyczny. $\square$

Uwaga:
dla $k = s = 1 \Rightarrow$ Tw. Schura.

Def Równanie $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = 0$, $c_i \in \mathbb{Z}$,
jest regularne w $\mathbb{N}$, gdy
$\forall r \ \forall \chi : \mathbb{N} \to [r] \ \exists$ monochrom. rozw.

Tw 10 (Rado, 1943)

Równanie $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = 0$, $c_i \in \mathbb{Z}$, jest
regularne w $\mathbb{N}$ wgdy ma nietrywialne
rozw. w $\{0, 1\}$, tzn.
$\exists \emptyset \neq I \subseteq [n] : \sum_{i \in I} c_i = 0$

Pr $x + y - z = 0$ $(1 + 0 - 1 = 0)$ – Schur
$x + y - 2z = 0$ $(1 + 1 - 2 = 0)$ – V.d.W.
$x + y - 3z = 0$ NIE!

dowód $\Rightarrow$

p - l. pierwsza, $p > |c_1| + \ldots + |c_k|$

$\forall j \in \mathbb{N}: \quad j = p^{\alpha_j}(\beta_j p + \gamma_j), \ \alpha_j, \beta_j \geq 0, \ 1 \leq \gamma_j \leq p-1$

Np. $p=7$ $\quad 20 = 7^0(2\cdot 7+6), \ 28 = 7(0\cdot 7+4), \ 490 = 7^2(1\cdot 7+3)$

Pokolorujmy: $\chi(j) = \gamma_j$

Z zał. o regularności $\Rightarrow \exists$ monochr. rozw.,

czyli $\exists \ x_i = p^{\alpha_{x_i}}(\beta_{x_i} p + \gamma), \ i = 1, \ldots, n: \ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$.

Upraszczając $\alpha_i := \alpha_{x_i}, \ \beta_i := \beta_{x_i}$, mamy

$$\sum_{i=1}^{n} c_i p^{\alpha_i}(\beta_i p + \gamma) = 0 \quad / : p^{\alpha}, \ \alpha = \min \alpha_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i: \alpha_i = \alpha} c_i \cdot \gamma \equiv 0 \pmod p \quad / : \gamma, \quad \underline{I = \{i : \alpha_i = \alpha\}}$$

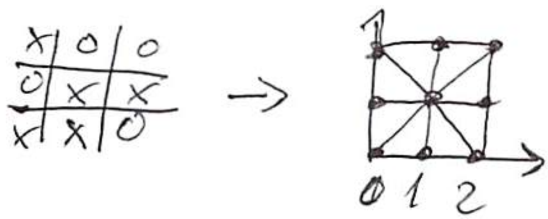
$$\sum_{i \in I} c_i \equiv 0 \pmod p \Rightarrow \sum_{i \in I} c_i = 0$$

bo $\left| \sum_{i \in I} c_i \right| \leq \sum_{i \in I} |c_i| < p$

$\Leftarrow$ pomijamy $\square$

TW. HALES'A - JEWETTA

Gra w kółko i krzyżyk



linie:
00 20 00 ~~02~~
10 21 11 ~~11~~
20 22 22 ~~20~~

Gra w SET : $81 = 3^4$ Kart (4 cechy, 3 wartości)

Def. Alfabet lin. upor. A, $|A| = t$.
n-kostka nad A to

$$C_t^n = \{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, \dots, t-1\} = A \}$$

Linia w C_t^n : $L = \{ l_0, \dots, l_{t-1} \}$,

$l_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$; $\exists \ [n] = R \cup S, \ R \neq \emptyset$
oraz $\exists \ c_l \in A, \ l \in S$: $\forall \ k = 0, \dots, t-1$

$$x_{k,l} = \begin{cases} c_l & \text{gdy } l \in S \\ k & \text{gdy } l \in R \end{cases}$$

Np. C_4^3 $(n=3, t=4)$ $L = \{020, 121, 222, 323\}$

$[3] = \underbrace{\{1,3\}}_{R} \cup \underbrace{\{2\}}_{S}$ $\quad c_2 = 2$

Tw 11 (Hales, Jewett, 1963)

$\forall r, t\ \exists n: \forall \chi: C_t^n \to [r]\ \exists$ monochr. linia. $\square$

Związek z Tw. v.d. Waerdena

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \to \sum_{i=1}^{n} a_i t^{i-1}$ to bijekcja

między C_t^n a $\{0, 1, \dots, t^n - 1\}$

Obrazem linii $L = (l_0, \dots, l_{t-1})$ jest

zbiór liczb $y_k = \sum_{l \in S} c_l t^{l-1} + \sum_{l \in R} k t^{l-1} = a + kd$,

gdzie $a = \sum_{l \in S} c_l t^{l-1}$, $d = \sum_{l \in R} t^{l-1}$,

czyli ciąg AP_k.

Zatem Tw. 11 uog. Tw. 8.

Jeśli n spełnia Tw. 11, to t^n spełnia Tw. 8