Matematyka Dyskretna

Zestaw 9: Grafy - Turán, kolorowanie

1. Czy prawdą jest, że jeśli graf ma 10 wierzchołków i 25 krawędzi, to nie zawiera trójkata?
2. Narysować (opisać) graf Turána $T_5(23)$. Obliczyć jego liczbę krawędzi $t_5(23)$. Ile wynosi liczba klikowa $\omega(T_5(23))$?
3. Wyznacz liczbę Turána $ex(n, K_{1,r})$ dla wszyskich $n \geqslant r+1$. Tutaj $K_{1,r}$ jest gwiazdą o r promieniach (krawędziach). Wskazówka: rozważ dwa przypadki: $(r-1)n$ - parzyste i $(r-1)n$ - nieparzyste.
4. Udowodnij nierówność $t_k(n) \leqslant \frac{k-1}{2k} n^2$ oraz, że równość w niej zachodzi tylko, gdy $k|n$. Wskazówka: zapisz $n = kj + i$, $0 \leqslant i < k$, a następnie wyprowadź wzór $t_k(n) = \frac{k-1}{2k}(n^2 - i^2) + \binom{i}{2}$.
5. Pokaż, że $t_k(n)/(n^2/2) \to \frac{k-1}{k}$, gdy $n \to \infty$. Wskazówka: użyj oszacowania z poprzedniego zadania oraz oszacowania $t_k(n) \geqslant t_k\left(k\lfloor \frac{n}{k} \rfloor\right)$. Z czego to drugie wynika?
6. Wyznacz liczbę chromatyczną (a) cyklu C_n, (b) koła W_n (patrz zestaw 7, zad. 13), (c) grafu Petersena (wikipedia).
7. Udowodnić, że jeśli graf G ma m krawędzi, to $\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.
8. Dla grafu $G = (V, E)$, gdzie $V = \{a, b, c, d, x, y, z, w\}$, a $E = \{ay, az, aw, bx, bz, bw, cx, cy, cw, dx, dy, dz\}$ ustaw wierzchołki na wejściu algorytmu zachłannego tak, by (i) pokolorować G minimalną liczbą kolorów, (ii) maksymalną liczba kolorów.
9. Uogólnij część (ii) poprzedniego zadania, tzn. dla każdego $n \geqslant 3$ znajdź graf dwudzielny o $2n$ wierchołkach, które można uporządkować tak, że algorytm zachłanny potrzebuje nie 2, ale n kolorów.
10. Na podstawie Tw. Brooksa, scharakteryzuj wszystkie (nie tylko spójne) grafy G, dla których $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.
11. (a) Uzasadnij, że dla każdego grafu G na n wierzchołkach zachodzą oszacowania $\chi(G) \geqslant \max\{\omega(G), n/\alpha(G)\}$, gdzie $\omega(G)$ to liczba klikowa grafu G, czyli moc największej kliki w G, a $\alpha(G)$ to liczba niezależności grafu G, czyli moc największego zbioru niezależnego w G.

    (b) Podaj przykłady 2 grafów, dla których raz jedno, a raz drugie oszacowanie z p. (a) jest lepsze.

    (c) Wywnioskuj z (a), że $\chi(G)\chi(G^c) \geqslant n$, a w konsekwencji, $\chi(G) + \chi(G^c) \geqslant 2\sqrt{n}$, gdzie G^c to dopełnienie grafu G.