

Matematyka Dyskretna

Zestaw 6: Funkcje tworzące

1. Podaj wzór jawny na a_n , jeżeli zwykła funkcja tworząca ciąg (a_n) ma postać:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (-x/3)^{i+1} \\ (2) \quad g(x) &= \frac{2x}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{5+x} \\ (3) \quad f(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} \end{aligned}$$

2. Podaj wzór jawny na a_n , jeżeli wykładnicza funkcja tworząca ciąg (a_n) ma postać:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \sum_{n=0}^{100} nx^{n+2} \\ (2) \quad h(x) &= (2x - 3x^2)^2 \\ (3) \quad h(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x/3)^{i+1}}{i!} \\ (4) \quad f(x) &= \frac{1}{3-x} \\ (5) \quad g(x) &= \frac{x}{1+x^2} \\ (6) \quad g(x) &= \frac{1}{2+3x} \\ (7) \quad f(x) &= x^2 e^{-2x} \\ (8) \quad g(x) &= x \sum_{i=0}^{\infty} (4x)^i + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k \end{aligned}$$

3. Metodą funkcji tworzących rozwiąż rekurencję

$$a_1 = -2, \quad a_n = 5a_{n-1} - 1, \quad n \geq 2.$$

4. Metodą funkcji tworzących wyznacz D_n , jeżeli

$$D_n = nD_{n-1} + 2^n, \quad n \geq 2, \quad D_1 = 1.$$

5. Korzystając z funkcji tworzących, znajdź wzór jawny na a_n , jeśli

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_{n-1} - a_n \quad \text{dla } n \geq 1.$$

6. Metodą funkcji tworzących wyznacz b_n , jeżeli $b_n = 3nb_{n-1}$ dla $n \geq 1$ i $b_0 = 2$.

7. Wyznacz funkcję tworzącą ciąg (a_n) spełniającego rekurencję

$$a_n = a_{n-2} - 3a_{n-1} + 4^n - 1, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

8. Znajdź równanie rekurencyjne dla liczby a_n podziałów zbioru $[n]$ na trzy niepuste podzbiory (kolejność nieistotna), a następnie znajdź wzór jawny na a_n .

9. Rozwiąż równanie rekurencyjne z zad. 11 z zestawu 5 przy pomocy funkcji tworzących. Wskaz.: skorzystając z rozwiązania przykładu na wykładzie (o nawiasach wyznaczających kolejność mnożenia).