Matematyka Dyskretna

Zestaw 5: równania rekurencyjne

Do wszystkich zadań podaj odpowiedź najpierw w postaci rekurencji, a potem spróbuj ją rozwiązać.

1. Na ile sposobów można wciągnąć na n-metrowy maszt flagi trzech kolorów, jeśli flagi czerwone mają szerokość dwóch metrów a pozostałe jednego metra ?
2. Na ile sposobów można wciągnąć na n-metrowy maszt flagi pięciu kolorów, jeśli flagi niebieskie i zielone mają szerokość 1m, a pozostałe 2m ?
3. Znajdź liczbę n-elementowych ciągów ternarnych (tzn. o elementach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$), w których liczba zer jest parzysta.
4. Wyznacz liczbę n-elementowych ciągów ternarnych, w których żadne dwie dwójki nie stoją obok siebie.
5. W pewnej populacji królików każda para zdolna do rozrodu rodzi co miesiąc trzy pary. W chwili „zero" jest jedna nowonarodzona para. Zakładając, że króliki są zdolne do rozrodu po dwóch miesiącach od narodzin, wyznacz liczbę par królików po n miesiącach.
6. Na ile sposobów można wypełnić prostokąt o wymiarach $2 \times m$ kostkami o wymiarach 2 na 1 ?
7. Podwojona wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków, po dwa krążki w każdym z n różnych rozmiarów. Zasady przenoszenia są takie jak na wykładzie: mamy trzy pręty, nie można położyć większego krążka na mniejszy. Jaka jest minimalna liczba ruchów potrzebna do przeniesienia wieży z jednego pręta na drugi ?
8. Dana jest pewna liczba $k \geqslant 2$. Znajdź liczbę obszarów a_n, na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, z których k jest równoległych, a pozostałe przecinają wszystkie proste. Zakładamy, że żadne trzy proste nie przechodzą przez jeden punkt. (Podaj rekurencję ze względu na n, zakładając, że k jest ustalone.)
9. Ile jest podziałów zbioru $[n]$ na dwa niepuste podzbiory (kolejność nieistotna)?
10. Ile jest podziałów zbioru $[n]$ na trzy niepuste podzbiory (kolejność nieistotna)?
    Wskaz.: wykorzystaj poprzednie zadanie.
11. Ile jest sposobów połączenia w pary wierzchołków wypukłego $2n$-kąta za pomocą nieprzecinających się odcinków (boki, przekątne).
12. W czasie szalejącej inflacji bank oferuje lokatę o następujących warunkach: każdego miesiąca potrącana jest zaliczka podatkowa w wysokości 25% kwoty sprzed 2 miesięcy, a kwota dodana w ciągu poprzedniego miesiąca przynosi profit w wysokości 200%. Klient zakłada lokatę z kwotą początkową 1zł. Ile pieniędzy będzie na koncie po roku?
    Wskaz.: Tutaj $a_0 = 1$. Po pierwszym miesiącu ta kwota urośnie do $a_1 = 1 + 2 = 3$ (bo zaliczka podatkowa nie jest jeszcze pobierana), a po dwóch miesiącach do $a_2 = 3+2(3-1)-0,25 = 6,75$.
13. Mając do dyspozycji n klatek ustawionych szeregowo, chcemy rozmiescić w niej k (nierozróżnialnych) lwów tak, by w każdej klatce był co najwyżej jeden lew i żadne lwy nie sąsiadowały ze sobą. Niech $g(n, k)$ będzie liczbą wszystkich takich rozmieszczeń. Udowodnij, że $g(2k-1, k) = 1$, $g(2k, k) = k + 1$, $g(n, 1) = n$, oraz $g(n, k) = g(n-2, k-1) + g(n-1, k)$ dla $n \geqslant 2k-1 \geqslant 3$.
14. Znaleźć wzory na $S(n, n-2)$ i $P(n, n-2)$. (te liczby zostały zdefiniowane na wykładzie 29.11).

15. Pokazać, że $P(n,3)$ równa się liczbie podziałów liczby $2n$ na trzy składniki, wszystkie mniejsze niż n.

16. Pokazać, że (i) $P(2n,n) = P(n)$, (ii) $P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$.

Rozwiązania:

1. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_n = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n$.
2. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_n = 3^{n+1}/4 + (-1)^n/4$
3. $a_0 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + (3^{n-1} - a_{n-1}) = a_{n-1} + 3^{n-1} = \frac{3^n+1}{2}$
4. $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $a_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n$
5. $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$
6. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_m = a_{m-1} + a_{m-2}$
7. $a_1 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 2$, $n \geqslant 2$, $a_n = 2^{n+1} - 2$
8. $a_k = k + 1$, $a_n = a_{n-1} + n$, $n \geqslant k+1$, $a_n = \binom{n+1}{2} - \binom{k+1}{2} + k + 1$
9. $a_2 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $n \geqslant 2$, $a_n = 2^{n-1} - 1$
10. $a_3 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + (2^{n-2} - 1) = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1 - 2^n)$
11. $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}a_{n-k}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = a_1 = 1$
12. $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 2(a_{n-1} - a_{n-2}) - \frac{a_{n-2}}{4} = 3a_{n-1} - \frac{9}{4}a_{n-2}$, $a_n = (1+n)(\frac{3}{2})^n$.
13. Pierwsza klata z lwem lub pusta.
14. $S(n,n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$, $P(n,n-2) = 2$
15. $n = a + b + c$, $2n = (a+b) + (a+c) + (b+c)$
16. $P(n+k,k) = \sum_{i=1}^{k} P(n,i) \overset{k=n}{=} P(n)$;
    $1 \in$: $P(n-1,k-1)$;
    $1 \notin$: $P(n-k,k)$, bo $n = a_1 + \cdots + a_k \to n-k = (a_1 - 1) + \ldots (a_k - 1)$.