

Matematyka Dyskretna

Zestaw 5: równania rekurencyjne

Do zadań 1-12 podaj odpowiedź najpierw w postaci rekurencji, a potem spróbuj ją rozwiązać.

1. Na ile sposobów można wciągnąć na n -metrowy maszt flagi trzech kolorów, jeśli flagi czerwone mają szerokość dwóch metrów a pozostałe jednego metra?
2. Na ile sposobów można wciągnąć na n -metrowy maszt flagi pięciu kolorów, jeśli flagi niebieskie i zielone mają szerokość 1m, a pozostałe 2m?
3. Znajdź liczbę n -elementowych ciągów ternarnych (tzn. o elementach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$), w których liczba zer jest parzysta.
4. Wyznacz liczbę n -elementowych ciągów ternarnych, w których żadne dwie dwójki nie stoją obok siebie.
5. W pewnej populacji królików każda para zdolna do rozrodu rodzi co miesiąc trzy pary. W chwili „zero” jest jedna nowonarodzona para. Zakładając, że króliki są zdolne do rozrodu po dwóch miesiącach od narodzin, wyznacz liczbę par królików po n miesiącach.
6. Na ile sposobów można wypełnić prostokąt o wymiarach $2 \times m$ kostkami o wymiarach 2 na 1?
7. Podwojona wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków, po dwa krążki w każdym z n różnych rozmiarów. Zasady przenoszenia są takie jak na wykładzie: mamy trzy pręty, nie można położyć większego krążka na mniejszy. Jaka jest minimalna liczba ruchów potrzebna do przeniesienia wieży z jednego pręta na drugi?
8. Dana jest pewna liczba $k \geq 2$. Znajdź liczbę obszarów a_n , na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, z których k jest równoległych, a pozostałe przecinają wszystkie proste. Zakładamy, że żadne trzy proste nie przechodzą przez jeden punkt. (Podaj rekurencję ze względu na n , zakładając, że k jest ustalone.)
9. Ile jest podziałów zbioru $[n]$ na dwa niepuste podzbiory (kolejność nieistotna)?
10. Ile jest podziałów zbioru $[n]$ na trzy niepuste podzbiory (kolejność nieistotna)?
Wskaz.: wykorzystaj poprzednie zadanie.
11. Ile jest sposobów połączenia w pary wierzchołków wypukłego $2n$ -kąta za pomocą nieprzecinających się odcinków (boki, przekątne).
12. W czasie szalejącej inflacji bank oferuje lokatę o następujących warunkach: każdego miesiąca potrącana jest zaliczka podatkowa w wysokości 25% kwoty sprzed 2 miesięcy, a kwota dodana w ciągu poprzedniego miesiąca przynosi profit w wysokości 200%. Klient zakłada lokatę z kwotą początkową 1zł. Ile pieniędzy będzie na koncie po roku?
Wskaz.: Tutaj $a_0 = 1$. Po pierwszym miesiącu ta kwota urośnie do $a_1 = 1 + 2 = 3$ (bo zaliczka podatkowa nie jest jeszcze pobierana), a po dwóch miesiącach do $a_2 = 3 + 2(3 - 1) - 0,25 = 6,75$.
13. Mając do dyspozycji n klatek ustawionych szeregowo, chcemy rozmieścić w niej k (nierozróżnialnych) lwów tak, by w każdej klatce był co najwyżej jeden lew i żadne lwy nie sąsiadowały ze sobą. Niech $g(n, k)$ będzie liczbą wszystkich takich rozmieszczeń. Udowodnij, że $g(2k - 1, k) = 1$, $g(2k, k) = k + 1$, $g(n, 1) = n$, oraz $g(n, k) = g(n - 2, k - 1) + g(n - 1, k)$ dla $n \geq 2k - 1 \geq 3$.
14. Znaleźć wzory na $S(n, n - 2)$ i $P(n, n - 2)$. (te liczby zostały zdefiniowane na wykładzie 29.11).
15. Pokazać, że $P(n, 3)$ równa się liczbie podziałów liczby $2n$ na trzy składniki, wszystkie mniejsze niż n .
16. Pokazać, że (i) $P(2n, n) = P(n)$, (ii) $P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k)$.