Matematyka Dyskretna

Zestaw 4: podziały zbiorów, permutacje z powtórzeniami, zasada włączania i wyłączania

1. Grupę 20 aktywistów, w której jest 4 mieszkańców Poznania, dzielimy na cztery 5-osobowe delegacje, przy czym ważny jest dla nas jedynie skład delegacji, a nie uprządkowanie osób w grupach czy kolejność delegacji. Ile jest takich podziałów, w których
   (a) w każdej delegacji jest jeden poznaniak?
   (b) w jednej z delegacji jest jeden poznaniak, a w innej trzej pozostali?
2. Ile słów 10-literowych można utworzyć mając do dyspozycji cztery litery a, cztery b i cztery c? A ile, gdy zamiast czterech, będziemy mieć do dyspozycji po dziesięć liter każdego rodzaju?
3. Zebrało się n szachistów, mających do dyspozycji k szachownic, $n \geqslant 2k$. Na ile różnych sposobów można utworzyć k par szachistów do rozegrania pierwszej rundy turnieju? Należy rozważyć cztery sytuacje (Tak-Tak, Nie-Tak, Tak-Nie, Nie-Nie), w zależności od tego, czy ważne jest dla nas, kto gra białymi a kto czarnymi, oraz przy których szachownicach zasiądą wybrane pary.
4. Szkoła, w której jest 120 uczniów, ma sekcje judo i karate. Liczba uczniów chodzących tylko na judo jest dwa razy większa od liczby tych, którzy chodzą na karate (i być może także na judo). Uczniów nieuczęszczających na żaden kurs jest o 25 więcej niż chodzących na oba kursy. 75 uczniów chodzi na co najmniej jeden kurs. Ilu uczniów uczęszcza na judo, ilu na karate, a ilu jest jednocześnie w obu sekcjach?
5. W ilu permutacjach liczb $1, 2, \ldots, 20$ pierwsza liczba jest większa od 5, a ostatnia jest mniejsza od 15?
6. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 700 i względnie pierwszych z 6! ?
7. Ile ciągów długości n, zbudowanych z liczb $0, 1, \ldots, 10$ zawiera co najmniej jedno zero, co najmniej jedną jedynkę i co najmniej jedną dwójkę?
8. W ilu permutacjach liter słowa MATHEMATICS występuje zbitka MM lub AA lub THE?
9. Ile liczb całkowitych z przedziału od 1 do 250 jest podzielnych przez co najmniej jedną z liczb 3, 4, 6, 10?
10. Do czterech różnych, 5-osobowych samochodów wsiada 9 kobiet i 11 mężczyzn. Oblicz w ilu przypadkach w każdym samochodzie znajdzie sie kobieta.
11. Rzucamy n razy dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wyrzuconych par pojawią się wszystkie pary (i, i), $i = 1, 2, \ldots 6$.
12. Rozdajemy t różnych piłek wśród m dzieci ($t \geqslant m$). Na ile sposobow możemy to zrobić tak, aby przynajmniej jedno dziecko zostało bez piłki.
13. Na balu jest n małżeństw. W pewnym momencie panowie proszą panie do tańca, ale nie swoje żony. Na ile sposobów mogą to zrobić?
14. Sadzamy w rzędzie n małżeństw. W ilu ustawieniach żadne małżeństwo nie siedzi razem? Jak zmieni się wynik, jeśli małżeństwa sadzamy przy okrągłym stole (na nieponumerowanych krzesłach)?

Rozwiązania:

1. (a) $\frac{16!}{(4!)^4}$ lub $\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}$ (preferowane 1. rozwiązanie)
   (b) $\binom{4}{1} \cdot \frac{16!}{4! \cdot 2! \cdot (5!)^2 \cdot 2}$ lub $\binom{4}{1}\binom{16}{4}\binom{12}{2}\binom{10}{5}\frac{1}{2}$ (preferowane 1. rozwiązanie)

2. $3 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} + 3 \cdot \frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 4!}$

3. (TT) $\frac{n!}{2^k \cdot (n-2k)!} \cdot 2^k = (n)_{2k}$ lub od razu $(n)_{2k}$ jako liczba $2k$-elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru mocy n (tutaj kolejne wybrane pary siadają przy kolejnych stolikach, pierwszy z każdej pary gra białymi
   (NT) $\frac{n!}{2^k \cdot (n-2k)!} = \frac{(n)_{2k}}{2^k}$
   (TN) $\frac{n!}{2^k \cdot (n-2k)! \cdot k!} \cdot 2^k = \frac{(n)_{2k}}{k!}$
   (NN) $\frac{n!}{2^k \cdot (n-2k)! \cdot k!} = \frac{(n)_{2k}}{2^k k!}$

4. $|J| = 70$, $|K| = 25$, $|J \cap K| = 20$

5. $20! - 5 \cdot 19! - 6 \cdot 19! + 5 \cdot 6 \cdot 18!$, bo $|A \cap B| = |X| - |\bar{A} \cup \bar{B}| = |X| - \big(|\bar{A}| + |\bar{B}| - |\bar{A} \cap \bar{B}|\big)$

6. $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, zatem pytamy o liczbę liczb niepodzielnych ani przez 2, ani przez 3, ani przez 5.
   A_i - zbiór liczb podzielnych przez i, $|A_i| = \lfloor \frac{700}{i} \rfloor$
   $|A_2| = 350$, $|A_3| = 233$, $|A_5| = 140$, $|A_6| = 116$, $|A_{10}| = 70$, $|A_{15}| = 46$, $|A_{30}| = 23$
   $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 350 + 233 + 140 - 116 - 70 - 46 + 23 = 514$
   Odp. $700 - 514 = 186$.

7. $11^n - (10^n + 10^n + 10^n - 9^n - 9^n - 9^n + 8^n)$ – stosujemy wzór na $|\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2|$, gdzie A_i to zbiór ciągów bez liczby i

8. $|M \cup A \cup T| = \frac{10!}{2! \cdot 2!} + \frac{10!}{2! \cdot 2!} + \frac{9!}{2! \cdot 2!} - \frac{9!}{2!} - \frac{8!}{2!} - \frac{8!}{2!} + 7!$

9. $|A_3 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_{10}| = \lfloor \frac{250}{3} \rfloor + \lfloor \frac{250}{4} \rfloor + \lfloor \frac{250}{6} \rfloor + \lfloor \frac{250}{10} \rfloor - \lfloor \frac{250}{12} \rfloor - \lfloor \frac{250}{6} \rfloor - \lfloor \frac{250}{30} \rfloor - \lfloor \frac{250}{12} \rfloor - \lfloor \frac{250}{20} \rfloor - \lfloor \frac{250}{30} \rfloor + \lfloor \frac{250}{12} \rfloor + \lfloor \frac{250}{60} \rfloor + \lfloor \frac{250}{30} \rfloor + \lfloor \frac{250}{60} \rfloor - \lfloor \frac{250}{60} \rfloor$ – tutaj A_i jak w zad. 6, a kolejne mianowniki to NWW poszczególnych podzbiorów liczb

10. $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| = \frac{20!}{(5!)^4} - 4\binom{11}{5}\frac{15!}{(5!)^3} + \binom{4}{2}\frac{11!}{(5!)^2}\frac{10!}{(5!)^2} - 0 + 0$ lub $\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5} - 4\binom{11}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5} + \binom{6}{2}\binom{11}{5}\binom{6}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}$ – tutaj A_i – w i-tym aucie brak kobiet

11. $|\Omega| = 36^n$, A_i - wynik (i,i) *nie* pojawił się; $|\bigcap_{i=1}^6 \bar{A}_i| = \sum_{k=0}^6 (-1)^k S_k$,
    gdzie $S_k = \binom{6}{k}(36-k)^n = 36^n - 6 \cdot 35^n + \binom{6}{2} \cdot 34^n - \binom{6}{3} \cdot 33^n + \binom{6}{4} \cdot 32^n - \binom{6}{5} \cdot 31^n + \binom{6}{6} \cdot 30^n$,
    zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi $\sum_{k=0}^6 (-1)^k \binom{6}{k}(1 - k/36)^n$

12. A_i - i-te dziecko bez piłki
    $|\bigcup_{i=1}^m A_i| = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1}\binom{m}{k}(m-k)^t = \binom{m}{1} \cdot (m-1)^t - \binom{m}{2} \cdot (m-2)^t + \cdots + (-1)^m \cdot \binom{m}{m-1} 1^t$

13. A_i - i-ty pan prosi swoją żonę
    $|\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! = n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! - \binom{n}{3} \cdot (n-3)! + \cdots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}(n-n)!$

14. A_i - i-te małżeństwo siedzi razem
    rząd: $|\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}(2n-k)! \cdot 2^k$
    stół: $|\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}(2n-k-1)! \cdot 2^k$