Matematyka Dyskretna

Zestaw 3: zasada szufladkowa

1. W głębokiej szufladzie mamy 10 par różnych skarpetek. Ile z nich trzeba wyłowić, by mieć pewność, że wśród nich będzie para?

   Rozwiązanie: 11

2. W turnieju bierze udział 100 pingpongistów. Pierwszego dnia każdy rozegrał 32 mecze. Wykazać, że co najmniej czterech zawodników osiągnęło tyle samo zwycięstw.

   Rozwiązanie: Szufladki: liczby zwycięstw poszczególnych zawodników (od 0 do 32 - 33 szufladki),
   kule: zawodnicy (100 kul)
   $100 > 33 \cdot 3$

3. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ wybieramy $n+1$ różnych liczb. Udowodnij, że wśród wybranych liczb zawsze znajdziemy

   a) dwie o sumie $2n+1$,

   Rozwiązanie: szufladki: pary liczb o sumie $2n+1$, czyli $(1, 2n), (2, 2n-1), \ldots, (n, n+1)$ (n szufladek);
   kule: liczby ($n+1$ kul)

   b) dwie względnie pierwsze,

   Rozwiązanie: szufladki: pary sąsiednich liczb, czyli $(1, 2), (3, 4), \ldots, (2n-1, 2n)$ (n szufladek);
   kule: liczby ($n+1$ kul)

   c) dwie, z których jedna dzieli drugą.

   Rozwiązanie: szufladki: kolejne liczby nieparzyste $t = 1, 2, \ldots, 2n-1$ (n szufladek);
   kule: liczby ($n+1$ kul); liczbę wkładamy do szufladki t, jeśli jest postaci $t \cdot 2^k$, dla pewnego $k \geqslant 0$

   We wszystkich przypadkach sprawdź, czy twierdzenie zachodzi, jeśli zamiast $n+1$ wybieramy n liczb.

   Rozwiązanie: NIE, bo kontrprzykłady (a) $[n]$, (b) $\{2, 4, \ldots, 2n\}$, (c) $[2n] \setminus [n]$

4. Udowodnij, że

   a) W dowolnym ciągu n liczb całkowitych istnieje segment (=podciąg kolejnych) o sumie podzielnej przez n.

   Rozwiązanie: Różnica dwóch liczb dzieli się przez n, jeśli ich reszty z dzielenia przez n są takie same. Dla $t = 1, 2, \ldots, n$ zdefiniujmy sumy: $S_t = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$. Jeśli jakaś suma S_t daje resztę z dzielenia przez n równą zero, to mamy szukany podciąg (jest to S_t). W przeciwnym razie definiujemy szufladki jako niezerowe reszty z dzielenia sum S_t przez n - mamy $n-1$ szufladek; kule sumy S_t - mamy n kul. Zatem, w którejś z szufladek znajdują się co najmniej dwie sumy, S_i, S_j, $i < j$; wtedy szukanym podciągiem jest $a_{i+1}, \ldots, a_j$ (suma jego elementów wynosi $S_j - S_i$).

   b) Wśród dowolnych $n+1$ liczb całkowitych, istnieją dwie, których różnica jest podzielna przez n.

   Rozwiązanie: szufladki: reszty z dzielenia przez n - mamy n szufladek;
   kule: liczby - mamy $n+1$ kul.

5. Pokaż, że wśród 10 punktów rzuconych na trójkąt rownoboczny o boku 1 zawsze znajdziemy dwa w odległości nie większej niż 1/3.

   Rozwiązanie: Dzielimy trójkąt na 9 identycznych trójkatów równobocznych o boku trzy razy mniejszym od boku trójkąta wyjściowego.
   Szufladki: obszary, na które podzieliliśmy trójkąt - mamy 9 szufladek;
   kule: rzucane punkty - mamy 10 kul.

6. Wewnątrz kwadratu o boku 1 umieszczono 51 punktów. Uzasadnij, że znajdziemy wśród nich trzy, które leżą w kole o promieniu 1/7.

   Rozwiązanie: Tym razem dzielimy kwadrat na 25 identycznych kwadratów o boku 5 razy mniejszym od boku kwadratu wyjściowego.
   Szufladki: obszary na które podzieliliśmy kwadrat - mamy 25 szufladek;
   kule: punkty - mamy 51 kul.
   Zauważmy, że promień koła opisanego na kwadracie o boku 1/5 wynosi $\frac{1}{2}(1/5)\sqrt{2} < 1/7$.

7. Uzasadnij, że dla dowolnego 10-elementowego zbioru $M \subset \{1, \ldots, 106\}$ istnieją rozłączne, niepuste podzbiory $A, B \subset M$ o takiej samej sumie elementów. Czy można zastąpić 10 przez 9 lub 106 przez 107?

   Rozwiązanie: Minimalna suma elementów podzbioru zbioru M to 1, maksymalna to $97 + 98 + \cdots + 106 = 1015$.
   Szufladki: wszystkie możliwe sumy - mamy 1015 szufladek;
   kule: wszystkie niepuste podzbiory (10-elementowego) zbioru M - mamy 1023 kul.
   Zatem istnieją dwa podzbiory A', B' zbioru M o tej samej sumie. Aby podzbiory były rozłączne usuwamy ich część wspólną, tzn. $A = A' \setminus (A' \cap B')$, $B = B' \setminus (A' \cap B')$.

8. Każdy z n studentów zdawał w sesji sześć egzaminów. Możliwe oceny to 3,4,5. Znajdź najmniejsze n, dla którego możemy mieć pewność, że przynajmniej 11 studentów zakończyło sesję z takim samym wynikiem (tzn. każdy dostał ten sam multizbiór ocen). Proszę uzasadnić, że mniejszego n przyjąć nie można.

   Rozwiązanie: Odp. 281. Uzasadnienie: szufladki to wszystkie możliwe multizbiory ocen - mamy $\binom{3+6-1}{6} = 28$ szufladek (kombinacja z powtórzeniami 6 z 3);
   kule: studenci - mamy 281 kul.

9. W ciemnej szufladzie jest s sztućców. Jakie jest najmniejsze n, dla którego możemy mieć pewność, że w szufladzie znajdziemy przynajmniej 7 łyżek lub przynajmniej 10 noży lub przynajmniej 5 widelców? Proszę uzasadnić, że mniejszego n przyjąć nie można.

   Rozwiązanie: Stosujemy uogólnioną zasadę szufladkową (zas. podziałową) z $t = 3$, $m_1 = 7$, $m_2 = 10$, $m_3 = 5$. Sprawdzamy, że $20 = 7 + 10 + 5 - 3 + 1$. Wśród 19 sztućców może być 6 łyżek, 9 noży i 4 widelce.

10. Siedemnastu zawodników wzięło udział w turnieju, w którym każdy grał z każdym (raz), a mecze odbywały się w 3 różnych miastach. Udowodnij, że jest 3 zawodników, którzy rozegrali wszystkie 3 mecze między sobą w tym samym mieście.

    Rozwiązanie: Patrzymy najpierw na mecze zawodnika A z pozostałymi. Szufladki to 3 miasta (Kraków, Poznań, Warszawa), kule to 16 pozostałych graczy. Zatem z sześcioma z nich A grał w tym samym miescie. Bez straty ogólności można przyjąć, że A grał z $B - G$ w Warszawie. Jeśli któraś para graczy spośród $B - G$ również grała w Warszawie, to mamy szukaną trójkę. W przeciwnym razie stosujemy tw. o przyjęciu na 6 osób (patrz wykład), gdzie relacje „znać się" i „nie znać sie" zastępujemy przez „ mecz w Krakowie" i „mecz w Poznaniu".

11. Dowieść, że wśród dowolnych siedmiu liczb całkowitych zawsze są dwie takie, że różnica ich kwadratów jest podzielna przez 10. Wskaz.: Ile jest reszt kwadratowych modulo 10?

    Rozwiązanie: Reszty z dzielenia przez 10 (cyfry jedności) kwadratów liczb całkowitch to $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 6$, $5^2 = 5$, $6^2 = 6$, $7^2 = 9$, $8^2 = 4$, $9^2 = 1$ - jest ich tylko 6: $0, 1, 4, 5, 6, 9$.
    Szufladki: reszty kwadratowe z dzielenia przez 10 - mamy 6 szufladek;
    kule: liczby - mamy 7 kul.
    Lub: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ i patrz następne zadanie ($n = 5$).

12. Wykaż, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją dwie, których suma lub różnica jest podzielna przez $2n$.

    Rozwiązanie: Różnica dwóch liczb dzieli się przez $2n$, jeśli ich reszty z dzielenia przez $2n$ są równe. Suma dwóch liczb dzieli się przez $2n$ jeśli ich reszty z dzielenia przez $2n$ sumują się do $2n$.
    Szufladki: pary (różnych) reszt z dzielenia przez $2n$, które sumują się do $2n$ oraz 0 i n, czyli $(0), (1, 2n-1), \dots, (n+1, n-1), (n)$ - mamy $n+1$ szufladek;
    kule: liczby - mamy $n+2$ kule. Dwie kule w tej samej szufladce to dwie liczby o tej samej reszcie z dzielenia przez $2n$ albo o resztach sumujących sie do $2n$.
    Uwaga: Dla $n=5$ to zadanie jest równoważne zadaniu poprzedniemu, bo $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ jest podzielne przez 10 wtedy i tylko wtedy, gdy $a+b$ lub $a-b$ jest podzielne przez 10 (Dlaczego?)

13. Macierz 5×65 wypełniono wyrazami ze zbioru $\{-1, 1\}$. Udowodnij, że zawsze znajdziemy

    a) 3 identyczne kolumny,

    Rozwiązanie: Mamy $2^5 = 32$ różnych „rodzajów" kolumn, tzn. ciągów binarnych długości 5.
    Szufladki: „rodzaje" kolumn - mamy 32 szufladki;
    kule: kolumny - mamy 65 kul. Stąd 3 kolumny muszą być identyczne.

    b) 3 wiersze i 3 kolumny, na przecięciach których wszystkie wyrazy są takie same.

    Rozwiązanie: 3 identyczne kolumny dostajemy z punktu a). Każda z nich to ten sam ciąg binarny $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, gdzie $a_i \in \{-1, 1\}$.
    Szufladki: liczby $-1, 1$ (2 szufladki);
    kule: indeksy $i \in [5]$ (5 kul). Kulę i wrzucamy do szufladki „-1" gdy $a_i = -1$, w przeciwnym razie do szufladki „1". W którejś szufladce będą przynajmniej 3 indeksy. One wyznaczają szukane 3 wiersze.

14. Macierz 5×41 wypełniono wyrazami ze zbioru $\{-1, 1\}$. Udowodnij, że zawsze znajdziemy 3 wiersze i 3 kolumny, na przecięciach których wszystkie wyrazy są takie same.

    Rozwiązanie: Każda kolumna ma co najmniej 3 takie same elementy: -1 lub 1 (patrz rozw. zadania 13b). Przypiszmy jej arbitralnie jedną taką trójkę (bo może ich być więcej, np gdy kolumna jest ciągiem $(1, 1, 1, 1, -1)$.) Jest $\binom{5}{2} = 10$ możliwości dla ich pozycji (numerów wierszy) i 2 możliwości co do wartości (-1 lub 1). Zatem mamy $2 \cdot 10 = 20$ „rodzajów" kolumn.
    Szufladki: „rodzaje" kolumn - mamy 20 szufladek;
    kule: kolumny - mamy 41 kul. Zatem co najmniej 3 kolumny są tego samego rodzaju, co należało dowieść (bo istnieją 3 wiersze, na przecięciu których mają one tę samą wartość - wszystkie 9 liczb to 1 lub wszystkie 9 liczb to -1).

15. Wykaż, ze dla dowolnego naturalnego n istnieje liczba a złożona tylko z jedynek i zer, która jest podzielna przez n.

    Rozwiązanie: Niech $a_t = 1111\dots1$, $t = 1, 2, \dots$ będzie liczbą, której wszystkie t cyfr to jedynki. Liczba postaci $a_j - a_i$, gdzie $j > i$, składa się z samych jedynek oraz zer. Ponadto, jeśli reszty z dzielenia liczb a_i, a_j przez n są równe, to liczba $a = a_j - a_i$ jest podzielna przez n.
    Szufladki: reszty z dzielenia przez n - mamy n szufladek;
    kule: liczby a_t - mamy nieskończenie wiele kul. Zatem w którejś szufladce będą przynajmniej 2 kule - liczby a_i i a_j o tej samej reszcie z dzielenia przez n.