Matematyka Dyskretna

Zestaw 1: prawa i metody przeliczania

1. Rzucamy trzema kostkami do gry: zieloną, czerwoną i niebieską.

   a) Ile różnych wyników możemy otrzymać ?

   b) W ilu wynikach nie uzyskamy tej samej liczby oczek na wszystkich trzech kostkach ?

   c) W ilu wynikach wszystkie trzy liczby oczek są różne ?

2. a) Ile jest liczb 5-cyfrowych ?

   b) Ile liczb 5-cyfrowych zawiera dokładnie jedną trójkę ?

   c) Ile jest takich liczb 5-cyfrowych, które są palindromami, tzn. niezależnie od kierunku czytania przedstawiają ten sam wynik ?

3. Ile jest ciągów ternarnych długo?ci n, w których żadne 2 sąsiednie elementy nie są takie same?

4. Ile jest ciągów ternarnych długo?ci n zawierających dokładnie k jedynek, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$.

5. Spo?ród pięciu różnych książek hiszpańskich, sze?ciu francuskich i o?miu włoskich wybieramy dwie. Na ile sposobów możemy je wybrać tak, aby nie byly napisane w tym samym języku ?

6. Na ile sposobow można wybrać kolejno dwie karty z talii 52 kart tak, aby

   a) pierwszą kartą był as, a drugą nie była dama,

   b) pierwszą była karta koloru karo, a drugą nie była dama ?

7. Są 3 różne, bezpo?rednie drogi z miasta A do miasta B, 2 różne, bezpo?rednie drogi z B do miasta C i 4 różne, bezpo?rednie drogi z A do C. Na ile sposobów można dojechać (bezpo?rednio lub po?rednio przez B)

   a) z A do C i z powrotem ?

   b) z A do C i z powrotem, nie przejeżdżając żadnego odcinka trasy dwa razy ?

8. Na ile sposobów można ustawić dwa różne króle na szachownicy o wymiarach $n \times m$ tak, aby nie stały na sąsiadujących polach ?

9. Na ile sposobów możemy utworzyć niepustą paczkę mając do dyspozycji pięć identycznych jabłek i osiem identycznych brzoskwiń ?

10. Wskazać bijękcję między

    a) zbiorem wszystkich rozmieszczeń k rozróżnialnych kul w n oznaczonych szufladkach, a zbiorem wszystkich funkcji działających pomiędzy zbiorami odpowiednich mocy.

    b) zbiorem wszystkich rozmieszczeń n rozróżnialnych kul w m oznaczonych szufladkach, przy założeniu, że każda szufladka zawiera co najwyżej jedną kulę, a a zbiorem wszystkich iniekcji pomiędzy zbiorami odpowiednich mocy.

    c) zbiorem wszystkich rozmieszczeń n rozróżnialnych kul w k oznaczonych szufladkach, takich że każda szufladka zawiera co najmniej jedną kulę, a zbiorem wszystkich suriekcji pomiędzy zbiorami odpowiednich mocy.

    Następnie, podać wzór na liczbe tych rozmieszczeń.

11. Udowodnić kombinatorycznie nastepujące to tożsamo?ci:

    a) $\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$

    b) $\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k}\binom{m}{\ell-k} = \binom{n+m}{\ell}$

    c) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Odpowiedzi:

1. a) 6^3
   b) $6^3 - 6$
   c) $6 \cdot 5 \cdot 4$
2. a) $9 \cdot 10^4$
   b) $9^4 + 8 \cdot 9^3 \cdot 4$
   c) 900
3. $3 \cdot 2^{n-1}$
4. $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$
5. $5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 6$
6. a) $4 \cdot 47$
   b) $1 \cdot 48 + 12 \cdot 47$
7. a) $(4 + 6) \cdot (4 + 6)$
   b) $4 \cdot (3 + 6) + 6 \cdot (4 + 2)$
8. $(m - 2) \cdot (n - 2) \cdot (nm - 9) + ((m - 2) \cdot 2 + (n - 2) \cdot 2) \cdot (nm - 6) + 4 \cdot (nm - 4)$

   lub

   $nm(nm - 1) - (4 \cdot 3 + (2n + 2m - 8) \cdot 5 + (n - 2)(m - 2) \cdot 8)$
9. $6 \cdot 9 - 1$

10 a) Bez straty ogólności rozważamy funkcje z $\{1, 2, \ldots, k\}$ do $\{1, 2, \ldots, n\}$. Funkcji f przyporządkowujemy rozmieszczenie takie, że $f(i) = j$ wtedy i tylko wtedy gdy i-ty element trafia do j-tej szufladki.