TEORIA GRAFÓW. MATERIAŁY VI.

semestr zimowy 2015/2016. Jerzy Jaworski

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

8. GRAFY PLANARNE.

8.1. Grafy płaskie i planarne.

Mówimy, że graf jest **układalny na płaszczyznie** lub **planarny**, jeżeli może byc narysowany na płaszczyźnie w taki sposób, że jego krawędzie przecinają się jedynie w swoich końcach. Rysunek planarnego grafu G będzie nazywany **planarnym ułożeniem** grafu G. Planarne ułożenie $\widetilde{G}$ grafu G może być traktowane jako graf izomorficzny z G; zbiór wierzchołków grafu $\widetilde{G}$ stanowi zbiór punktów reprezentujących wierzchołki grafu G, podczas gdy zbiór krawędzi grafu $\widetilde{G}$ stanowią linie reprezentujące krawędzie grafu G oraz ponadto dowolny wierzchołek grafu $\widetilde{G}$ jest incydentny z wszystkimi krawędziami grafu $\widetilde{G}$ które go zawierają. Planarne ułożenie grafu planarnego to **graf płaski**. Jeśli graf planarny nie zawiera krawędzi cięcia, to odpowiadajacy mu graf płaski nazywamy niekiedy **mapą**.

Krawędzie cyklu grafu planarnego tworzą krzywą Jordana (ciągła, nie przecinająca się krzywa, której początek i koniec pokrywają się). Jeżeli J jest krzywą Jordana na płaszczyźnie, to resztę płaszczyzny można podzielić na dwa rozłączne zbiory otwarte zwane **wnętrzem** i **zewnętrzem** krzywej J. Oznaczmy wnętrze i zewnętrze krzywej J przez odpowiednio $int\ J$ oraz $ext\ J$ a ich domknięcia odpowiednio przez $Int\ J$ oraz $Ext\ J$. Oczywiście $Int\ J \cap Ext\ J = J$. Twierdzenie Jordana mówi, że dowolna linia łącząca punkt należący do $int\ J$ z punktem należącym do $ext\ J$ musi przeciąć J w pewnym punkcie.

Twierdzenie 8.1. *Graf K_5 nie jest planarny.*

Twierdzenie 8.2. *Graf $K_{3,3}$ nie jest planarny.*

Niezwykle prostą i fundamentalną dla teorii grafów charakteryzację grafów planarnych podał w 1920 r. wybitny polski matematyk Kazimierz Kuratowski.

Twierdzenie 8.3. (Kuratowski) *Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera on K_5 lub $K_{3,3}$ ani też żadnego podziału tych grafów (inaczej grafu homeomorficznego do któregoś z nich).*

Pojęcie ułożenia planarnego może być rozszerzone na inne powierzchnie. Graf G jest układalny na powierzchni S jeżeli może być narysowany na S w taki sposób, że jego krawędzie przecinają się jedynie w swoich końcach; taki „rysunek” nazywa się ułożeniem grafu G na S. Nie wszystkie grafy mogą być ułożone na płaszczyznie i jest to również prawdziwe dla innych powierzchni. Okazuje się, że dla każdej powierzchni S istnieją grafy które nie są układalne na S (Fréchet i Fan, 1967), natomiast każdy graf może być „ułożony” w przestrzeni R^3. Ponadto można pokazać, że grafy planarne i grafy układalne na kuli są jednym i tym samym.

Twierdzenie 8.4. *Graf G jest układalny na płaszczyznie wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest układalny na sferze.*

8.2. Grafy dualne.

Płaski graf G dzieli resztę płaszczyzny na pewną liczbę spójnych obszarów; domknięcia tych obszarów są nazywane **ścianami** grafu G. Pojęcie ściany ma również zastosowanie przy układaniu grafów na innych powierzchniach. Oznaczmy przez $F(G)$ oraz $\varphi(G)$ odpowiednio zbiór ścian oraz ich liczbę w grafie płaskim G. Każdy graf płaski ma dokładnie jedną nieograniczoną ścianę zwaną **ścianą zewnętrzną** (f_1).

Twierdzenie 8.5. *Niech v będzie wierzchołkiem grafu planarnego G. Wtedy G może być ułożony na płaszczyznie w taki sposób, że v leży na ścianie zewnętrznej tego ułożenia.*

Oznaczmy granicę ściany f grafu płaskiego G przez $b(f)$. Jeżeli G jest spójny wtedy $b(f)$ może być rozpatrywana jako domknięty spacer w którym każdą krawędź cięcia grafu G należącą do $b(f)$ musimy przejść dwukrotnie; każda $b(f)$, która nie zawiera krawędzi cięcia jest oczywiście cyklem w G. O ścianie f mówimy, że jest **incydentna** z wierzchołkami i krawędziami swojej granicy. Jeżeli e jest krawędzią cięcia w grafie płaskim, to albo jedna ściana jest incydentna z e, albo, w przeciwnym razie, dwie ściany są incydentne z tą krawędzią. Mówimy, że krawędź **oddziela** ściany z nią incydentne. **Stopień** $d_G(f)$ ściany f to liczba krawędzi jakie są z nią incydentne przy czym krawędzie cięcia liczą się podwójnie.

Mając dany graf płaski G możemy zdefiniować inny graf G^* w następujący sposób: każdej ścianie f grafu G odpowiada wierzchołek f^* w G^* i każdej krawędzi e z G odpowiada w G^* krawędź e^* przy czym dwa wierzchołki f^* i g^* z G^* są połączone krawędzią w G^* wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ściany f i g są oddzielone przez krawędzie w G. Graf G^* jest nazywany **grafem dualnym** grafu G. Łatwo zauważyć, że graf dualny G^* do grafu płaskiego G jest planarny. Łatwo również pokazać, że jeśli G jest spójny, to graf dualny G^{**} do grafu G^* jest izomorficzny z G.

Należy również zauważyć, że izomorficzne grafy płaskie mogą mieć nieizomorficzne grafy dualne. Zatem pojęcie grafu dualnego ma znaczenie jedynie dla grafu płaskiego i nie może być rozszerzone w ogólności dla grafów planarnych. Z definicji mamy

$$\nu(G^*) = \varphi(G), \qquad \varepsilon(G^*) = \varepsilon(G)\,, \tag{8.1}$$

oraz

$$d_{G^*}(f^*) = d_G(f) \qquad \text{dla każdego} \quad f \in F(G) \tag{8.2}$$

Twierdzenie 8.6. *Jeżeli G jest grafem płaskim, to*

$$\sum_{f\in F} d(f) = 2\varepsilon.$$

8.3. Wzór Eulera.

Twierdzenie 8.7. *Jeżeli G jest spójnym grafem płaskim, to* $\nu - \varepsilon + \varphi = 2$.

Wniosek 8.7.1. *Wszystkie grafy płaskie danego spójnego grafu planarnego mają taką samą liczbę ścian.*

Wniosek 8.7.2. *Jeżeli G jest prostym grafem planarnym o ν, $\nu \geq 3$, wierzchołkach, to* $\varepsilon \leq 3\nu - 6$.

Wniosek 8.7.3. *Jeżeli G jest prostym grafem planarnym, to* $\delta \leq 5$.

Wniosek 8.7.4. K_5 *nie jest planarny.*

Wniosek 8.7.5. $K_{3,3}$ *nie jest planarny.*

8.4. Kolorowanie map i grafów planarnych.

Niech F będzie zbiorem ścian mapy $\hat{G}$. Mówimy, że **ściany $\hat{G}$ można pokolorować k kolorami**, jeśli istnieje funkcja $f : F \to \{1, 2, \ldots, k\}$ przyporządkowująca każdej ścianie mapy $\hat{G}$ jeden z k kolorów taka, że żadna krawędź mapy nie oddziela dwóch ścian o tych samych kolorach.

Twierdzenie 8.8. *Ściany mapy $\hat{G}$ można pokolorować dwoma kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka G jest parzysty.*

Jednym z najbardziej znanych zagadnień teorii grafów jest tak zwana hipoteza czterech barw (lub hipoteza czterech kolorów), mówiąca każdą mapę można pokolorować czterama kolorami. Hipotezę tę udowodnili w 1977 roku Appel and Haken, pokazując, że problem ten można zredukować do skończonej liczby przypadków, które następnie pokolorowali z pomocą komputera. Ponieważ nietrudno zauważyć, że kolorowanie ścian mapy sprowadza się do kolorowania wierzcholków grafu do niej dualnego, wynik Appela i Hakena można sformułować następująco.

Twierdzenie 8.9. *Jeśli graf G jest planarny, to $\chi(G) \leq 4$.*

Nietrudno zauważyć, że z Wniosku 8.7.3 wynika, że wierzchołki każdego grafu planarnego można pokolorować używając sześciu kolorów. Na wykładzie pokażemy natomiast wynik nieco tylko słabszy od twierdzenia Hakena i Appela.

Twierdzenie 8.10. *Jeśli graf G jest planarny, to $\chi(G) \leq 5$.*

Dążąc do rozstrzygnięcia hipotezy czterech barw często sprowadzano ją do innych zagadnień grafowych. Poniższe twierdzenie jest jednym z wielu rezultatów tego typu.

Twierdzenie 8.11. *Następujace stwierdzenia są równoważne.*
(i) *Liczba chromatyczna dowolnego grafu planarnego jest nie większa niż cztery.*
(ii) *Ściany każdej mapy można pokolorować czterema kolorami.*
(iii) *Ściany każdej 3-regularnej mapy można pokolorować czterema kolorami.*
(iv) *Indeks chromatyczny dowolnej 3-regularnej mapy wynosi trzy.*

ZADANIA XII

Zadanie 46. Pokaż, korzystając z twierdzenia Jordana, że $K_{3,3}$ nie jest planarny.

Zadanie 47. Trzej sąsiedzi korzystają z tych samych "źródeł" wody, oleju i cukru. Niestety nie lubią się nawzajem do tego stopnia, że chcą znaleźć niekrzyżujące się drogi z każdego domu do każdego ze źródeł po to, by uniknąć spotkań. Czy jest to wykonalne?

Zadanie 48. Znaleźć graf nieplanarny, który nie jest podziałem żadnego z grafów K_5, $K_{3,3}$. Dlaczego istnienie takiego grafu nie przeczy twierdzeniu Kuratowskiego?

Zadanie 49. Pokaż, że jeżeli zarówno G jak i G^c są grafami planarnymi, to

$$\nu(G) = \nu(G^c) \leq 10\,.$$

9. „RZADKIE” GRAFY O DUŻEJ LICZBIE CHROMATYCZNEJ.

9.1. Grafy Mycielskiego.

Graf Mycielskiego M_n, $n \geq 2$, zdefiniowany jest rekurencyjnie w następujący sposób. Przyjmujemy $M_2 = K_2$ i niech $\nu(M_n) = m_n$. Wtedy zbiorem wierzchołków grafu M_{n+1} jest $V_{n+1} = \{v_1, \ldots, v_{m_n}, v'_1, \ldots, v'_{m_n}, w\}$, zbiór $\{v_1, \ldots, v_{m_n}\}$ rozpina w M_{n+1} podgraf H izomorficzny z M_n, a każdy z wierzchołków v'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, jest przyległy do w i wszystkich sąsiadów wierzchołka v_i. Zatem, na przykład, $M_3 = C_5$. Jak mówi poniższe twierdzenie, M_n jest grafem o dużej liczbie chromatycznej nie zawierającym trójkątów.

Twierdzenie 9.1. *Dla każdego $n \geq 2$, M_n nie zawiera K_3, a $\chi(M_n) = n$.*

9.2. Grafy Knesera i Shrijvera.

Niech dane będą dwie liczby naturalne k, n (przy czym najbardziej interesować nas będzie przypadek gdy n jest dużo większe niż k) i niech $A = \{1, 2, \ldots, 2n + k\}$. **Grafem Knesera** $Kn(n, k)$ nazywamy graf, którego zbiorem wierzchołków są wszystkie n-elementowe podzbiory zbioru A, a dwa wierzchołki są połączone krawędzią gdy odpowiadające im podzbiory są rozłączne. **Graf Shrijvera** $Sh(n, k)$ to podgraf $Kn(n, k)$ indukowany przez wszystkie podzbiory A nie zawierające żadnej z par $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}, \ldots, \{2n + k - 1, 2n + k\}$, $\{2n + k, 1\}$, tzn. nie zawierające „sąsiednich” elementów zbioru A.

Przykład 9.1. Sprawdź, że $Kn(2, 1)$ jest grafem Petersena.

Przykład 9.2. Pokaż, że $Sh(n, 1) = C_{2n+1}$.

Przykład 9.3. Pokaż, że $\chi(Kn(n, k)) \leq k + 2$.

Można pokazać, choć wszystkie znane dowody tego faktu są dość trudne i wymagają użycia metod topologicznych, że liczba chromatyczna grafów $Kn(n, k)$ i $Sh(n, k)$ jest taka jak jej oszacowanie górne podane w przykładzie 9.3.

Twierdzenie 9.2. $\chi(Sh(n, k)) = \chi(Kn(n, k)) = k + 2.$

Okazuje się jednak, że mimo dużej liczby chromatycznej, z dowolnego podgrafu grafu Shrijvera można otrzymać graf dwudzielny przez wyrzucenie stosunkowo małej liczby krawędzi (lub wierzchołków).

Twierdzenie 9.3. *Niech H będzie dowolnym podgrafem grafu Shrijvera $Sh(n, k)$.*
(i) *H zawiera dwudzielny podgraf o co najmniej $\varepsilon(H)\left(1 - \frac{2k}{2n+k}\right)$ krawędziach,*
(ii) *H zawiera indukowany podgraf dwudzielny o co najmniej $\nu(H)\left(1 - \frac{k}{2n+k}\right)$ wierzchołkach.*

Przykład 9.4. Pokaż, że $Kn(n, k)$ nie zawiera cykli nieparzystych o długości mniejszej niż $2\lfloor n/k \rfloor + 1$.