TEORIA GRAFÓW. MATERIAŁY V.

SEMESTR ZIMOWY 2015/2016 JERZY JAWORSKI

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

6.2. Twierdzenie Ramsey'a.

W tym paragrafie będziemy rozważali jedynie grafy proste. **Kliką** prostego grafu G nazywamy podzbiór S zbioru wierzchołków V taki, że $G[S]$ jest grafem pełnym. Oczywiście, S jest kliką w G wtedy i tylko wtedy, gdy S jest zbiorem niezależnym w G^c. Jeżeli G nie posiada dużych klik to można przypuszczać, że ma duży zbiór niezależny. Ma to rzeczywiście miejsce – co udowodnił Ramsey (1930). Pokazał on, że dla danych całkowitych, dodatnich liczb k i l, istnieje najmniejsza liczba całkowita $r(k,l)$ taka, że każdy graf o $r(k,l)$ wierzchołkach zawiera albo klikę o k wierzchołkach lub l wierzchołkowy zbiór niezależny. Łatwo zauważyć, że

$$r(1,l) = r(k,1) = 1 \quad \text{oraz} \quad r(2,l) = l, \quad r(k,2) = k.$$

Liczby $r(k,l)$ znane są jako **liczby Ramsey'a** ($r(3,3) = 6, r(3,4) = 9, r(3,5) = 14, r(3,6) = 18$, $r(3,7) = 23, r(3,8) = 28$, $r(3,9) = 36$, $r(4,4) = 18, r(4,5) = 25$).

Twierdzenie 6.4. *Dla dowolnych dwóch liczb naturalnych $k \geq 2$ oraz $\ell \geq 2$*

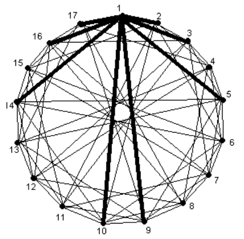
$$r(k,\ell) \leq r(k,\ell-1) + r(k-1,\ell)\,.$$

Co więcej, jeżeli obie liczby $r(k,\ell-1)$ i $r(k-1,\ell)$ są parzyste, to powyższa nierówność jest ostra.

Twierdzenie 6.5. (Erdős 1947). *Dla dowolnej naturalnej liczby k, $k \geq 2$,*

$$r(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}\,.$$

Przykład 6.2. Pokaż, że $r(4,4) = 18$.



6.2. Twierdzenie Turana.

Twierdzenie 6.6. *Niech $T_{m,\nu}$ będzie grafem pełnym m-dzielnym na ν wierzchołkach o mocach zbiorów m-podziału różniących się co najwyżej o jeden (graf Turana). Jeżeli prosty graf G ma ν wierzchołków i nie zawiera K_{m+1}, to*

$$\varepsilon(G) \leq \varepsilon(T_{m,\nu})\,.$$

Co więcej, w powyższej nierówności mamy równość wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest izomorficzny z $T_{m,\nu}$.

Przykład 6.3. Pokaż, że jeśli dla grafu prostego G mamy $\varepsilon > \nu^2/4$, to G zawiera K_3.

Przykład 6.4. Po zakończeniu pewnych rozgrywek trampkarzy okazało się, że spośród 15 biorących w nich udział drużyn dwie rozegrały po 14 meczów, dwie grały 12 razy, dziesięć stoczyło po 11 pojedynków, a jedna rozegrała tylko 8 spotkań. Wiedząc, że żadna para drużyn nie walczyła z sobą dwa razy pokaż, że wśród drużyn biorących udział w rozgrywkach istnieje *grupa pięciu takich, że każda z nich walczyła z wszystkimi pozostałymi czterema drużynami tej grupy.*

ZADANIA X

Zadanie 36. Korzystając z zasady indukcji matematycznej oraz z Twierdzenia 6.4. udowodnij, że

$$r(k, \ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}.$$

Zadanie 37. Pokaż, że $r(3, 4) = 9$.

Zadanie 38. Oszacuj jak najlepiej potrafisz liczbę Ramseya $r(5, 5)$.

Zadanie 39. Pokaż, że dla dowolnych $k, \ell \geq 1$

$$r(k, \ell) = r(\ell, k)$$

Zadanie 40. Po zakończeniu turnieju judo okazało się, że spośród 15 biorących w nim udział zawodników dwóch stoczyło po 9 walk, jeden walczył 8 razy, jedenastu stoczyło po 6 walk, a jeden walczył tylko 4 razy. Pokaż, że wśród judoków biorących udział w turnieju istnieje trójka takich, którzy w tych zawodach nie walczyli między sobą.

7. KOLOROWANIE WIERZCHOŁKÓW I KRAWĘDZI.

7.1. Liczba chromatyczna.

Przez k-**kolorowanie wierzchołków** grafu G rozumiemy przyporządkowanie każdemu wierzchołkowi grafu G jednego z k kolorów $1, 2, \ldots, k$ ($\psi\colon V(G) \to \{1, \ldots, k\}$). Kolorowanie jest **właściwe** jeżeli żadne dwa różne i przyległe wierzchołki nie są tego samego koloru. Zatem właściwe k-kolorowanie wierzchołków grafu G (bez pętel) jest to podział $(V_1, \ldots, V_k)$ zbioru $V(G)$ na k (być może pustych) zbiorów niezależnych. Graf G jest k-**kolorowalny wierzchołkowo** jeżeli posiada właściwe k-kolorowanie wierzchołków. Dla wygody zamiast „właściwe kolorowanie wierzchołków" będziemy mówili **kolorowanie** a zamiast „właściwe k-kolorowanie wierzchołków" – k-**kolorowanie**; podobnie będziemy skracali „k-kolorowalny wierzchołkowo" do k-**kolorowalny**. Oczywiście, graf jest k-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy podległy mu graf prosty jest k-kolorowalny. W naszych rozważaniach ograniczymy się więc do grafów prostych. Graf prosty jest 1-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest pusty a jest 2-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest dwudzielny.
Liczba chromatyczna $\chi(G)$ grafu G jest to najmniejsze k dla którego G jest k-kolorowalny; jeżeli $\chi(G) = k$, to o G mówimy, że jest k-chromatyczny. Mówimy, że graf G jest **krytyczny** jeżeli $\chi(H) < \chi(G)$ dla każdego właściwego podgrafu H grafu G. Graf jest k-**krytyczny** jeżeli jest k-chromatyczny oraz krytyczny; każdy k-chromatyczny graf posiada k-krytyczny podgraf.

Twierdzenie 7.1. *Jeżeli G jest k-krytyczny to $\delta \geq k-1$.*

Wniosek 7.1.1. *Kazdy graf k chromatyczny ma co najmniej k wierzchołków stopnia co najmniej $k-1$.*

Wniosek 7.1.2. *Dla każdego* G, $\chi \leq \Delta + 1$.

Przykład 7.1. Pokaż, że dla liczby chromatycznej $\chi(G)$ *grafu prostego* G *zachodzi nierówność*

$$\chi(G) \leq \max_{H \subseteq G} \delta(H) + 1 ,$$

gdzie $\delta(H)$ *oznacza minimalny stopień podgrafu* H.

Niech S będzie cięciem wierzchołkowym spójnego grafu G i niech składowe grafu $G - S$ mają odpowiednie zbiory wierzchołków $V_1, \dots, V_n$. Wtedy podgrafy $G_i = G[V_i \cup S]$ są nazywane S-**składowymi** grafu G. Mówimy, że kolorowanie grafów $G_1, \dots, G_n$ jest **zgodne** na S, jeżeli dla każdego $v \in S$, wierzchołek v ma przyporządkowany ten sam kolor w każdym z kolorowań.

Twierdzenie 7.2. *W grafie krytycznym żadne cięcie wierzchołkowe nie jest kliką.*

Jedynym 1-krytycznym grafem jest K_1, 2-krytycznym jest K_2, a jedynymi 3-krytycznymi grafami są k-cykle, k-nieparzyste ≥ 3.

7.2. Twierdzenie Brooks'a.

Twierdzenie 7.3. (Brooks,1941). *Jeżeli graf* G *jest spójnym grafem prostym i nie jest ani nieparzystym cyklem, ani grafem pełnym, to* $\chi(G) \leq \Delta$.

Przykład 7.2. Pokaż, że twierdzenie Brooksa jest równoważne twierdzeniu:
Jeśli graf G *jest* k*-krytyczny,* $k \geq 4$, *i* G *nie jest grafem pełnym, to* $2\varepsilon \geq \nu(k-1) + 1$.

7.3. Kolorowanie krawędzi - indeks chromatyczny.

Przez k-**kolorowanie krawędzi** ζ grafu G (bez pętli) rozumiemy przyporządkowanie każdej krawędzi grafu G jednego z k kolorów ze zbioru $K = \{1, 2, \dots, k\}$, czyli

$$\zeta \colon E(G) \to K .$$

Kolorowanie ζ jest **właściwe** jeżeli żadne dwie przyległe krawędzie nie są tego samego koloru. k-kolorowanie krawędzi można inaczej zdefiniować jako podział $(E_1, E_2, \dots, E_k)$ zbioru krawędzi E, gdzie E_i oznacza (być może pusty) podzbiór zbioru E, którego krawędziom przyporząd kowano kolor i. Właściwe k-kolorowanie krawędzi jest wówczas takim k-kolorowaniem, w którym każdy podzbiór E_i jest skojarzeniem. Graf G jest k-**kolorowalny krawędziowo** jeżeli G ma właściwe k-kolorowanie krawędziowe. Oczywiście każdy graf G (bez pętli) jest ε-kolorowalny krawędziowo; jeżeli G jest k-kolorowalny krawędziowo, to jest też l-kolorowalny krawędziowo dla każdego $l > k$ $(l \leq \varepsilon)$. **Indeks chromatyczny** (krawędziowa liczba chromatyczna) $\lambda'(G)$ grafu G bez pętli, jest to najmniejsza liczba k dla której graf G jest k-kolorowalny krawędziowo. Graf G jest k-**chromatyczny krawędziowo** jeżeli $\lambda'(G) = k$.

Przykład 7.3. Udowodnić, że jeżeli G *jest grafem prostym o maksymalnym stopniu* Δ, *to* $\chi'(G) \leq 2\Delta - 1$.

W każdym właściwym kolorowaniu krawędzi, każde dwie krawędzie incydentne z danym wierzchołkiem muszą mieć przyporządkowany inny kolor.

$$\chi' \geq \Delta . \tag{7.1}$$

Mówimy, że kolor i jest **reprezentowany** w wierzchołku v jeżeli pewna krawędź incydentna z v ma kolor i.

Lemat 7.3.1. *Niech G będzie grafem spójnym, który nie jest nieparzystym cyklem. Wtedy G ma 2-kolorowania krawędziowe w którym obydwa kolory są reprezentowane w każdym wierzchołku stopnia co najmniej dwa.*

Dla danego k-kolorowania krawędzi $\mathcal{E}$ grafu G oznaczmy przez $c(v)$ liczbę różnych kolorów reprezentowanych w v. Oczywiście, zawsze jest prawdą, że

$$c(v) \leq d(v). \tag{7.2}$$

Co więcej, $\mathcal{E}$ jest właściwym k-kolorowaniem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka v grafu G zachodzi w (7.2) równość. k-kolorowanie krawędzi $\mathcal{E}'$ będziemy nazywali **ulepszeniem** (poprawieniem) kolorowania $\mathcal{E}$ jeżeli

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)\,,$$

gdzie $c'(v)$ jest liczbą różnych kolorów reprentowanych w v w kolorowaniu $\mathcal{E}'$. k-kolorowanie krawędzi jest **optymalne** jeżeli nie może być ulepszone.

Lemat 7.3.2. *Niech $\mathcal{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_k)$ będzie optymalnym k-kolorowaniem krawędzi grafu G. Jeżeli istnieje wierzchołek u w grafie G oraz kolorowy i oraz j takie, że kolor i nie jest reprezentowany w u, natomiast kolor j jest reprezentowany w u przynajmniej dwukrotnie wtedy ta składowa grafu $G[E_i \cup E_j]$, która zawiera wierzchołek u jest nieparzystym cyklem.*

Twierdzenie 7.4. *Jeżeli G jest dwudzielny to*

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

7.4. Twierdzenie Vizinga.

Twierdzenie 7.5. (Vizing (1964), Gupta (1966)) *Jeżeli graf G jest prosty, to*

$$\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1.$$

Przykład 7.5. Pokaż, że $\chi'(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n - 1\,.$

ZADANIA XI

Zadanie 41. Dla jakiego n cykl na n wierzchołkach jest grafem krytycznym ?

Zadanie 42. Oszacuj z dołu liczbę chromatyczną grafu G na n wierzchołkach znając jego liczbę niezależności $\alpha(G)$.

Zadanie 43*. Pokaż, że jeżeli G jest grafem prostym, to

$$\chi(G) \geq \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$$

Zadanie 44. Pokaż, że jeżeli G jest k-regularnym grafem, $k \geq 1$, o nieparzystej liczbie wierzchołków, to

$$\chi'(G) = k + 1\,.$$

Zadanie 45. Wskaż w $K_{m,n}$ właściwe $\Delta(K_{m,n})$ kolorowanie krawędzi.