TEORIA GRAFÓW. MATERIAŁY IV.

SEMESTR ZIMOWY 2015/2016 JERZY JAWORSKI

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ZADANIA VII

Zadanie 25. Jeżeli jest to możliwe, to narysuj graf Eulera z parzystą liczbą wierzchołków i nieparzystą liczbą krawędzi. Jeśli wydaje ci się, że taki graf nie istnieje, wytłumacz dlaczego tak sądzisz.

Zadanie 26. Niech $L(G)$ będzie grafem krawędziowym prostego grafu G. Czy prawdą jest, że jeśli G jest Eulera, to również $L(G)$ jest grafem Eulera? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 27. Dla jakich n, m i ℓ graf pełny K_n oraz dwudzielny graf pełny $K_{m,\ell}$ są grafami Eulera?

4.2. Cykle Hamiltona.

Ścieżka zawierająca każdy wierzchołek grafu G jest nazywana **ścieżką Hamiltona** grafu G, podobnie, **cykl Hamiltona** jest to cykl, który zawiera każdy wierzchołek grafu G. Graf jest **hamiltonowski** (Hamiltona) jeżeli zawiera cykl Hamiltona. W przeciwieństwie do grafów eulerowskich nie istnieje prosty warunek konieczny i dostateczny aby graf był hamiltonowski.

Twierdzenie 4.2. (warunek konieczny) *Jeżeli graf G jest hamiltonowski, to dla każdego niepustego podzbioru S zbioru wierzchołków V*

$$\omega(G - S) \leq |S|.$$

Przedstawimy teraz warunki wystarczające na to by graf G był hamiltonowski. Ponieważ graf jest hamiltonowski jeżeli podległy mu graf prosty jest hamiltonowski więc możemy ograniczyć się do rozważania grafów prostych.

Twierdzenie 4.3. *Niech u v będą parą nieprzyległych wierzchołków prostego grafu G takich, że*

$$d_G(u) + d_G(v) \geq \nu \geq 3\,.$$

Wtedy G jest grafem hamiltonowskim wtedy i tylko wtedy, gdy $G + uv$ jest grafem hamiltonowskim.

Twierdzenie 4.4. (Ore, 1961) *Jeżeli G jest grafem prostym na ν wierzchołkach takim, że $\nu \geq 3$ i dla każdej pary nieprzyległych wierzchołków u oraz v zachodzi nierówność*

$$d_G(u) + d_G(v) \geq \nu\ ,$$

to G jest grafem Hamiltona.

Twierdzenie 4.5. (Dirac, 1952) *Jeżeli graf G jest prosty, $\nu \geq 3$ oraz $\delta \geq \frac{\nu}{2}$, to G jest hamiltonowski.*

Przykład 4.3. Pokaż, że jeżeli suma stopni każdej pary nieprzyległych wierzchołków prostego grafu G wynosi co najmniej $\nu - 1$, to G zawiera ścieżkę Hamiltona.

Przykład 4.4. Niech $L(G)$ będzie grafem krawędziowym prostego grafu G. Czy prawdą jest, że jeśli G jest grafem Hamiltona, to również $L(G)$ jest grafem Hamiltona? Odpowiedź uzasadnij.*

ZADANIA VIII

Zadanie 28. Pokaż, że graf dwudzielny o nieparzystej liczbie wierzchołków nie może być grafem Hamiltona.

Zadanie 29. Niech $L(G)$ będzie grafem krawędziowym prostego grafu G. Pokaż, że jeśli G jest eulerowski, to $L(G)$ jest grafem Hamiltona.

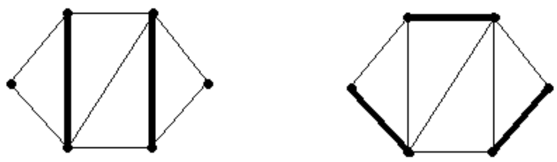
Zadanie 30. Pokaż, że jeśli graf zawiera ścieżkę Hamiltona, to dla dowolnego niepustego podzbioru S zbioru wierzchołków mamy

$$\omega(G - S) \leq |S| + 1 .$$

5. SKOJARZENIA.

5.1. Skojarzenia.

Podzbiór M zbioru krawędzi E nazywamy **skojarzeniem grafu** G jeżeli M nie zawiera pętli i żadne dwie krawędzie z M nie są przyległe. Dwa końce krawędzi z M są **skojarzone** przez M. Skojarzenie M **nasyca** wierzchołek v (v nazywamy M-**nasyconym**) jeżeli pewna krawędź z M jest incydentna z v; w przeciwnym razie v jest M-**nienasycony**. Jeżeli każdy wierzchołek grafu G jest M-nasycony, to skojarzenie M nazywamy **skojarzeniem doskonałym**. M jest **skojarzeniem największym** jeżeli graf G nie ma skojarzenia M' takiego, że $|M'| > |M|$.



Niech M będzie skojarzeniem w grafie G. Ścieżkę, do której należą krawędzie na przemian z M i $\overline{M} = E - M$ nazywać będziemy M-**przemienną ścieżką**. Jeżeli M-przemienna ścieżka ma początek i koniec M-nienasycony to nazywamy ją ścieżką M-**zasilającą** lub M-**zasiloną**.

Twierdzenie 5.1. (Berge, 1957) *Skojarzenie M w grafie G jest największe wtedy i tylko wtedy, gdy G nie zawiera M-zasilającej ścieżki.*

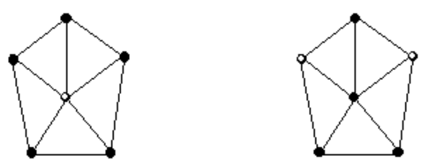
k-**faktorem** grafu G nazywamy k-regularny rozpięty podgraf grafu G. Zauważmy, że zbiór krawędzi 1-faktora grafu G jest jego skojarzeniem doskonałym. Graf G nazywamy k-**faktoryzowalnym** jeżeli istnieją krawędziowo rozłączne k-faktory $H_1, H_2, \ldots, H_n$ takie, że

$$E(G) = E(H_1) \cup E(H_2) \cup \cdots \cup E(H_n).$$

Przykład 5.1. Pokaż, że K_{2n} jest 1-faktoryzowalny i wskaż jego 1-faktoryzację.

5.2. Skojarzenia i pokrycia w grafach dwudzielnych.

Pokryciem grafu G nazywamy podzbiór K zbioru wierzchołków V taki, że każda krawędź w G ma co najmniej jeden koniec w K. Pokrycie K jest **najmniejsze** jeżeli G nie posiada pokrycia K' takiego, że $|K'| < |K|$.



Jeżeli K jest pokryciem grafu G natomiast M jest skojarzeniem grafu G, wtedy K zawiera co najmniej jeden koniec każdej z krawędzi należących do M. Zatem dla każdego skojarzenia M i każdego pokrycia K mamy, że $|M| \leq |K|$.

Lemat 5.2. *Niech M będzie skojarzeniem a K pokryciem takim, że $|M| = |K|$. Wtedy M jest największym skojarzeniem a K najmniejszym pokryciem.*

Twierdzenie 5.2. (König, 1931) *W grafie dwudzielnym* $\quad |M^*| = |K^*|$.

Przypuśćmy, że $G = (X, Y)$ jest grafem dwudzielnym. W wielu zastosowaniach trzeba znaleźć skojarzenie, które nasyca każdy wierzchołek w X. Warunek konieczny i dostateczny istnienia takiego skojarzenia podał w 1935 Hall. Aby go sformułować, dla każdego zbioru $S \subseteq V$ przez **zbiór jego sąsiadów**, oznaczany przez $N(S)$, będziemy rozumieć zbiór wszystkich wierzchołków przyległych do wierzchołków z S.

Twierdzenie 5.3. (Hall) *Niech G będzie grafem dwudzielnym z dwupodziałem (X, Y). Graf G zawiera skojarzenie, które nasyca każdy wierzchołek w X wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$|N(S)| \geq |S| \quad \textit{dla każdego } S \subseteq X.$$

Wniosek 5.3. (twierdzenie o parach małżeńskich) *Jeżeli G jest k-regularnym grafem dwudzielnym $(k > 0)$, to G ma skojarzenie doskonałe.*

Przykład 5.2. Udowodnij, że każdy k-regularny dwudzielny graf G jest 1-faktoryzowalny.

5.3. Skojarzenia doskonałe.

Składowa spójności grafu nazywana będzie **parzystą** lub **nieparzystą** w zależności od tego czy składa się z parzystej, czy nieparzystej liczby wierzchołków. Oznaczmy przez $o(G)$ liczbę nieparzystych składowych grafu G.

Twierdzenie 5.4. (Tutte, 1947) *Graf G zawiera skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$o(G - S) \leq |S| \quad \textit{dla każdego } S \subset V.$$

Przykład 5.3. Dla każdego k, $k > 1$, podaj przykład grafu k-regularnego, który nie ma skojarzenia doskonałego.

Przykład 5.4.∗ Korzystając z Przykładu 5.2. pokaż, że każdy $2k$-regularny graf jest 2-faktoryzowalny.

Przykład 5.5. Przedstaw K_{2n+1} jako sumę n cykli Hamiltona.

Przykład 5.6. Pokaż, że K_{10n-4} ma 5-faktoryzację.

Przykład 5.7. Udowodnij, że drzewo ma skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka v mamy $o(T - v) = 1$.

ZADANIA IX

Zadanie 31. Mówimy, że rodzina zbiorów $\{A_1, A_2 \ldots, A_m\}$ ma system różnych przedstawicieli gdy istnieje zbiór różnych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_m$ takich, że $a_i \in A_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Pokaż, że na to by rodzina zbiorów $\{A_1, A_2 \ldots, A_m\}$ posiadała system różnych przedstawicieli potrzeba i wystarcza, by dla każdego $I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ zachodziła nierówność

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \geq |I| \,.$$

Zadanie 32. Udowodnij, że drzewo ma co najwyżej jedno skojarzenie doskonałe.

Zadanie 33. Znajdź liczbę skojarzeń doskonałych w K_{2n}.

Zadanie 34. Czy pełny graf dwudzielny $K_{n,m}$ ma zawsze 3-faktor?

Zadanie 35. Pokaż, że jeśli graf G zawiera parzystą liczbę wierzchołków ν a minimalny stopień tego grafu spełnia nierówność $\delta \geq \nu/2 + 1$, to G zawiera 3-faktor.

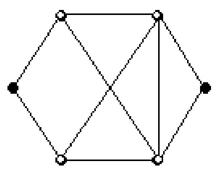
6. ZBIORY NIEZALEŻNE I KLIKI.

6.1. Zbiory niezależne.

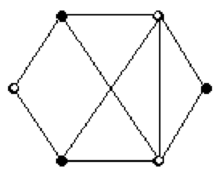
Podzbiór S zbioru wierzchołków S nazywamy **zbiorem niezależnym** grafu G jeżeli żadne dwa wierzchołki z S nie są przyległe w S.

Zbiór niezależny jest **największy** w grafie G jeżeli nie istnieje zbiór niezależny S' taki, że $|S'| > |S|$.

Przykład 6.1.



• *zbiór niezależny*



• *największy zbiór niezależny*

Twierdzenie 6.1. *Zbiór $S \subseteq V$ jest zbiorem niezależnym w G wtedy i tylko wtedy, gdy $V \setminus S$ jest pokryciem G.*

Liczba wierzchołków w największym zbiorze niezależnym w G jest nazywana **liczbą niezależności** grafu G i jest oznaczana przez $\alpha(G)$; podobnie, liczbę wierzchołków w najmniejszym pokryciu grafu G nazywamy **liczbą pokrycia** i oznaczamy przez $\beta(G)$.

Wniosek 6.1. $\alpha + \beta = \nu$

Krawędziowym odpowiednikiem zbioru niezależnego jest zbiór krawędzi, w którym żadne dwie nie są przyległe tzn. tworzących skojarzenie. Krawędziowy odpowiednik pokrycia jest nazywany **pokryciem krawędziowym.** Pokrycie krawędziowe grafu G jest to podzbiór L krawędzi E grafu G taki, że każdy wierzchołek grafu G jest końcem pewnej krawędzi z L. Zauważmy, że pokrycia krawędziowe nie zawsze istnieją – graf G ma pokrycie krawędziowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta > 0$. Oznaczmy przez $\alpha'(G)$ liczbę krawędzi w największym skojarzeniu w G a przez $\beta'(G)$ liczbę krawędzi w najmniejszym pokryciu krawędziowym. Liczby α' i β' nazywamy odpowiednio **liczbą niezależności krawędziowej** oraz **liczbą pokrycia krawędziowego**.

Twierdzenie 6.2. (Gallai, 1959). *Jeżeli $\delta > 0$, to*

$$\alpha' + \beta' = \nu\,.$$

Twierdzenie 6.3. *W grafie dwudzielnym G, dla którego $\delta > 0$, liczba wierzchołków w największym zbiorze niezależnym jest równa liczbie krawędzi w najmniejszym pokryciu krawędziowym (tzn. $\alpha = \beta'$).*