TEORIA GRAFÓW. MATERIAŁY II.

SEMESTR ZIMOWY 2015/2016 JERZY JAWORSKI

1.6. Ciągi stopni.

Przykład 1.16. Pokaż, że ciąg $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *nieujemnych liczb całkowitych jest ciągiem stopni pewnego grafu wtedy i tylko wtedy gdy* $\sum_{i=1}^{n} d_i$ *jest parzysta. Czy powyższy fakt jest prawdziwy dla grafu prostego ?*

Ciąg nieujemnych liczb całkowitych, który jest ciągiem stopni grafu prostego nazywać będziemy **graficznym**.

Przykład 1.17. Niech $\underline{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *będzie nierosnącym ciągiem nieujemnych liczb całkowitych, a* $\underline{d'} = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$.

(a) *Pokaż, że* $\underline{d}$ *jest graficzny wtedy i tylko wtedy gdy* $\underline{d'}$ *jest graficzny.*

(b) *Na podstawie (a) opisz algorytm konstruowania grafu prostego z ciągiem stopni* $\underline{d}$ *jeżeli taki graf istnieje.*

(c) *Korzystając z (a) i (b) zbuduj graf z ciągiem stopni (7,5,5,4,3,3,2,2,1).*

Przykład 1.18. Pokaż, że jeżeli ciąg $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ *jest graficzny, to suma* $\sum_{i=1}^{n} d_i$ *jest parzysta i*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) \quad \textit{dla} \quad 1 \leq k \leq n.$$

(Erdős i Gallai pokazali, że jest to również warunek wystarczający).

Przykład 1.19. Pokaż, że w dowolnej grupie ludzi liczącej co najmniej dwie osoby, zawsze znajdą się dwie z dokładnie taką samą liczbą przyjaciół w grupie.

1.7. Graf krawędziowy.

Grafem krawędziowym $L(G)$ grafu G nazywamy graf o zbiorze wierzchołków $E(G)$ taki, że dwa wierzchołki $L(G)$ są przyległe wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im krawędzie są przyległe w G.

Przykład 1.20. Pokaż, że graf krawędziowy $L(G)$ *grafu prostego* G *ma* $\varepsilon(G)$ *wierzchołków i* $\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}$ *krawędzi.*

1.8. Ścieżki i połączenia.

Spacerem w grafie G nazywamy niezerowy ciąg $W = v_0 e_1 v_1 e_2, \ldots, e_k v_k$ którego elementami są na przemian wierzchołki i krawędzie, taki, że dla $1 \leq i \leq k$ wierzchołki v_{i-1} i v_i są końcami krawędzi e_i. Mówimy, że W jest spacerem od v_0 do v_k lub (v_0, v_k)-spacerem. Wierzchołek v_0 nazywamy wierzchołkiem początkowym a v_k wierzchołkiem końcowym, natomiast $v_1, \ldots, v_{k-1}$ to wierzchołki wewnętrzne (v_0, v_k)-spaceru. Liczbę krawędzi k nazywamy **długością spaceru** W. Podciąg ciągu W zaczynający się od v_i i kończący na v_j jest (v_i, v_j)-**segmentem spaceru** W. Jeżeli W jest (v_0, v_k)-spacerem, W^* jest (v_k, v_l)-spacerem, to dodając te ciągi otrzymać możemy (v_0, v_l)-spacer WW^*. Przez W^{-1} oznaczać będziemy (v_k, v_0)-spacer będący ,,odwróceniem" spaceru W.
W grafie prostym (krawędzie są jednoznacznie wyznaczone przez swoje końce) spacer będzie określany ciągiem samych wierzchołków przy czym kolejne dwa wierzchołki muszą być przyległe. Często będziemy stosować ciąg wierzchołków również w dowolnym grafie.
Jeżeli w spacerze W krawędzie $e_1, e_2, \ldots, e_k$ są różne to W nazywać będziemy **szlakiem**. Jeżeli dodatkowo wszystkie wierzchołki W są różne, to W nazywać będziemy **ścieżką**. Szlak,

dla którego $v_0 = v_k$, nazywamy **domkniętym szlakiem**. Domknięty szlak o co najmniej jednej krawędzi, którego wszystkie wierzchołki są różne nazywać będziemy **cyklem**.

Przykład 1.21. Podaj przykład spaceru, szlaku, domkniętego szlaku, ścieżki i cyklu dla grafu z Przykładu 1.1.

Dwa wierzchołki u oraz v nazywamy **spójnymi** jeżeli istnieje (u, v)-ścieżka w G. Zakładając, że zawsze istnieje ścieżka zerowa – (v, v)-ścieżka złożona tylko z samego wierzchołka v, **spójność wierzchołków** jest relacją równoważności na zbiorze wierzchołków V. Zatem istnieje podział zbioru V na niepuste podzbiory (klasy równoważności) $V_1, V_2, \dots, V_\omega$ takie, że dwa wierzchołki są spójne wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tego samego podzbioru V_i. Podgrafy $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$ nazywamy **składowymi spójności grafu** G, $\omega = \omega(G)$ oznacza liczbę składowych spójności grafu G.
Jeżeli $\omega(G) = 1$, to graf G jest **grafem spójnym**, w przeciwnym razie ($\omega(G) > 1$) G jest niespójny.

Twierdzenie 1.2. *Niech G będzie grafem prostym o ν wierzchołkach. Jeżeli G ma $\omega = \omega(G)$ składowych spójności, to liczba jego krawędzi ε spełnia następujące nierówności*

$$\nu - \omega \leq \varepsilon \leq \binom{\nu - \omega + 1}{2}.$$

Wniosek 1.2. *Każdy prosty graf na ν wierzchołkach i o więcej niż $\binom{\nu-1}{2}$ krawędziach jest spójny.*

Jeżeli wierzchołki u i v są spójne w G, to istnieje (u, v)-ścieżka. Długość najkrótszej (u, v)-ścieżki nazywać będziemy **odległością** pomiędzy u i v i oznaczać przez $d(u, v) = d_G(u, v)$. Jeżeli u i v nie są spójne ((u, v)-ścieżka nie istnieje), to przyjmujemy, że $d_G(u, v) = \infty$. Łatwo sprawdzić, że (V, d) jest przestrzenią metryczną.
Średnicą grafu G nazywamy maksymalną odległość pomiędzy dwoma wierzchołkami w G; gdy G nie jest spójny mówimy, że średnica G jest nieskończona.

ZADANIA II

Zadanie 7. Pokaż, że $\delta \leq 2\varepsilon/\nu \leq \Delta$

Zadanie 8. Pokaż, że dla grafu prostego G wartości na przekątnej MM^T jak i A^2 są stopniami wierzchołków grafu G.

Zadanie 9. Zbadaj, które z wymienionych poniżej ciągów są ciągami stopni jakiegoś grafu prostego. Jeśli ciąg jest graficzny narysuj jeden z grafów o odpowiednim ciągu stopni wierzchołków, jeśli ciąg graficzny nie jest wyjaśnij dlaczego tak sądzisz.

a) $(4, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ b) $(4, 4, 3, 2, 2, 1)$ c) $(4, 4, 3, 2, 1)$.

Zadanie 10. Pokaż, że dowolny dwupodział (X, Y) k-regularnego grafu dwudzielnego, gdzie $k > 0$, jest taki, że $\mid X \mid = \mid Y \mid$.

Zadanie 11. Ile wierzchołków i ile krawędzi ma $L(K_{n,m,\ell})$ - graf krawędziowy pełnego grafu trójdzielnego ?

1.9. Cykle i krawędzie cięcia.

Przypomnijmy: Domknięty szlak o co najmniej jednej krawędzi, którego wszystkie wierzchołki są różne nazywamy **cyklem**. Cykl o długości k nazywać będziemy k-cyklem; k-cykl jest parzysty (nieparzysty), gdy k jest parzyste (nieparzyste). 3-cykl nazywamy często trójkątem.

Twierdzenie 1.3. *Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera żadnego cyklu nieparzystego.*

Krawędzią cięcia grafu G nazywamy krawędź e taką, że $\omega(G-e) > \omega(G)$.

Przykład 1.22 Wskaż krawędzie cięcia w grafie z Przykładu 1.1.

Twierdzenie 1.4. *e jest krawędzią cięcia grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy e nie jest zawarta w żadnym cyklu grafu G.*

Przykład 1.23. Z Wniosku 1.2. wiemy, że jeżeli G jest grafem prostym i $\varepsilon > \binom{\nu-1}{2}$, to G jest spójny. Dla $\nu > 1$ znajdź niespójny, prosty graf, dla którego $\varepsilon = \binom{\nu-1}{2}$.

Przykład 1.24.

(a) *Pokaż, że jeżeli G jest prosty i $\delta(G) > \lfloor \nu/2 \rfloor - 1$, to G jest spójny.*

(b) *Dla parzystego ν znajdź niespójny graf $(\nu/2-1)$-regularny.*

Przykład 1.25. Pokaż, że jeżeli G jest grafem prostym o średnicy dwa i $\Delta(G) = \nu - 2$, to $\varepsilon(G) \geq 2\nu - 4$.

Przykład 1.26. Pokaż, że jeżeli G jest grafem prostym o minimalnym stopniu $\delta(G) \geq 2$, to G zawiera cykl długości co najmniej $\delta(G)+1$.

ZADANIA III

Zadanie 12. Pokaż, że G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego rozbicia V na V_1 i V_2 ($V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$) istnieje krawędź z jednym końcem w V_1 i drugim w V_2.

Zadanie 13. Pokaż, że jeśli G jest niespójny, to G^c jest spójny. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

Zadanie 14. Pokaż, że jeżeli G jest spójny i każdy stopień w G jest parzysty, to dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ mamy $\omega(G-v) \leq \frac{1}{2} d_G(v)$.

2. DRZEWA.

2.1. Drzewa.

Graf acykliczny (nie zawierający żadnego cyklu) nazywamy **lasem**. **Drzewo** jest to spójny las. **Rozpiętym drzewem** grafu G nazywamy rozpięty podgraf grafu G będący drzewem.

Twierdzenie 2.1. *Graf spójny jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy każda jego krawędź jest krawędzią cięcia.*

Wniosek 2.1.1. *Każdy spójny graf zawiera rozpięte drzewo.*

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli G jest drzewem, to $\varepsilon = \nu - 1$.*

Przykład 2.1. Pokaż, że G jest lasem wtedy i tylko wtedy, gdy $\varepsilon = \nu - \omega$.

Wniosek 2.2.1. *Jeżeli G jest spójny, to* $\varepsilon \geq \nu - 1$.

Wniosek 2.2.2. *Każde nietrywialne drzewo ma co najmniej dwa wierzchołki wiszące (tzn. wierzchołki stopnia jeden).*

Przykład 2.2. Pokaż, że jeżeli G jest lasem o dokładnie $2k$ wierzchołkach stopnia nieparzystego, to istnieje k krawędziowo rozłącznych ścieżek $P_1, P_2, \ldots, P_k$ takich, że

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(P_i)\,.$$

Przykład 2.3. Narysuj wszystkie nieizomorficzne drzewa na 8 wierzchołkach, dla których maksymalny stopień jest równy 4.

Przykład 2.4. Pokaż, że ciąg liczb naturalnych $d_1, d_2, \ldots, d_\nu$ jest ciągiem stopni pewnego drzewa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)\;.$$

Twierdzenie 2.3. *Niech T będzie rozpiętym drzewem spójnego grafu G i niech e będzie krawędzią G nie należącą do T. Wtedy $T + e$ zawiera dokładnie jeden cykl.*

ZADANIA IV

Zadanie 15. Narysuj wszystkie nieizomorficzne drzewa na 7 wierzchołkach.

Zadanie 16.
(a) Pokaż, że jeśli G jest drzewem i $\Delta(G) \geq k$, to G ma co najmniej k wierzchołków stopnia jeden.
(b) Uzasadnij, że powyższe oszacowanie jest najlepsze z możliwych podając, dla każdego $k \geq 2$ przykład drzewa T o k wierzchołkach stopnia jeden takiego, że $\Delta(T) = k$.

Zadanie 17. Pokaż, że każdy prosty graf G zawiera co najmniej $\varepsilon - \nu + \omega$ różnych cykli.

Zadanie 18.* Niech T będzie ustalonym drzewem na $k + 1$ wierzchołkach. Pokaż, że jeżeli graf G jest prosty i $\delta(G) \geq k$, to w G istnieje podgraf izomorficzny z T.