TEORIA GRAFÓW. MATERIAŁY I.

SEMESTR ZIMOWY 2015/2016 JERZY JAWORSKI

1. GRAFY – PODSTAWOWE POJĘCIA.

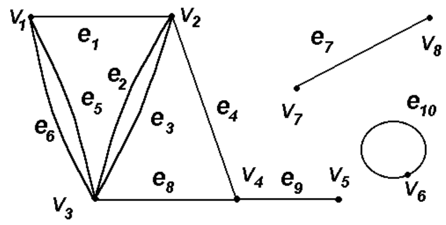
1.1. Grafy, grafy proste.

Grafem prostym G nazywamy parę $G = (V(G), E(G))$, gdzie $V(G)$ jest niepustym zbiorem **wierzchołków**, a $E(G)$ pewnym zbiorem par tych wierzchołków, nazywanym zbiorem **krawędzi**. W czasie kursu czasami (raczej rzadko) będziemy mieli do czynienia z grafami, które nie są proste. **Grafem** (grafem nieskierowanym) G nazywamy uporządkowaną trójkę $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ składającą się z niepustego zbioru wierzchołków $V = V(G)$, ze zbioru krawędzi $E = E(G)$ (rozłącznego z V) oraz z **funkcji incydencji** ψ_G, która przypisuje każdej krawędzi z E nieuporządkowaną parę wierzchołków, niekoniecznie różnych, z V.

Jeżeli e jest krawędzią, natomiast u i v są wierzchołkami takimi, że $\psi_G(e) = uv$, to mówimy, że wierzchołki u i v są **końcami** krawędzi e. Mówimy, że końce krawędzi są z nią **incydentne** (**związane**) i na odwrót. Wierzchołki, które są incydentne z tą samą krawędzią nazywamy **przyległymi**. Również o dwóch krawędziach incydentnych z tym samym wierzchołkiem mówimy, że są **przyległe**. Krawędź e o identycznych końcach ($\psi_G(e) = vv$) nazywamy **pętlą**. Zatem, nieco upraszczając, graf jest grafem prostym jeżeli nie ma pętli oraz **krawędzi wielokrotnych** – krawędzi łączących tę samą parę wierzchołków.

Przykład 1.1.

$$G = (V, E, \psi), \qquad V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}, \qquad E = \{e_1, e_2, \dots, e_{10}\}$$



$$\begin{array}{lllll} \psi(e_1) = v_1v_2 & \psi(e_2) = v_2v_3 & \psi(e_3) = v_2v_3 & \psi(e_4) = v_2v_4 & \psi(e_5) = v_1v_3 \\ \psi(e_6) = v_1v_3 & \psi(e_7) = v_7v_8 & \psi(e_8) = v_3v_4 & \psi(e_9) = v_4v_5 & \psi(e_{10}) = v_6v_6 \end{array}$$

Graf składający się z jednego wierzchołka nazywać będziemy **grafem trywialnym**. W naszych rozważaniach ograniczymy się tylko do **grafów skończonych** tzn. takich, dla których oba zbiory, wierzchołków i krawędzi, są skończone.

Symbole: $\nu = \nu(G)$ – liczba wierzchołków G, $\varepsilon = \varepsilon(G)$ – liczba krawędzi G.

1.2. Izomorfizm grafów.

Dwa grafy proste G i H są **identyczne** ($G = H$) jeżeli $V(G) = V(H)$ i $E(G) = E(H)$.

Dwa grafy proste G i H nazywamy **izomorficznymi** ($G \cong H$) jeżeli istnieje bijekcja

$$\theta : \quad V(G) \to V(H)$$

taka, że

$$\{u, v\} \in E(G) \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad \{\theta(u), \theta(v)\} \in E(H).$$

Jeżeli $G \cong H$, to G i H można przedstawić za pomocą tego samego rysunku – **grafu nieoznaczonego**. Graf ten możemy traktować jako klasę abstrakcji relacji równoważności jaką jest izomorfizm w zbiorze wszystkich grafów.
Automorfizmem grafu nazywamy izomorfizm grafu na siebie.

Przykład 1.2. Przykłady grafów izomorficznych i nieizomorficznych.

Zdefiniujemy teraz pewne specjalne typy grafów:

Graf prosty, w którym każda para wierzchołków jest połączona krawędzią nazywamy **grafem pełnym**. Z dokładnością do izomorfizmu istnieje dokładnie jeden graf pełny na n wierzchołkach – K_n.

Przykład 1.3. Ile krawędzi ma graf pełny na n wierzchołkach – K_n?

Grafem pustym nazywać będziemy graf, który nie posiada krawędzi ($E(G) = \emptyset$).

k-**kostką** nazywamy graf, którego wierzchołki odpowiadają k-elementowym ciągom zero-jedynkowym przy czym dwa wierzchołki są przyległe wtedy gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie na jednym miejscu.

Przykład 1.4. Jak wygląda 1-kostka, 2-kostka, 3-kostka?

Grafem dwudzielnym nazywamy graf, którego zbiór wierzchołków może być podzielony na dwa niepuste podzbiory X i Y, takie, że każda krawędź ma jeden koniec w X, drugi w Y. Podział (X, Y) nazywać będziemy **dwupodziałem** zbioru wierzchołków (*Inaczej:* żadne dwa wierzchołki należące do tego samego zbioru dwupodziału nie są połączone krawędzią w grafie dwudzielnym. Wprowadzając k-podział zbioru wierzchołków w analogiczny sposób definiujemy **graf k-dzielny**).
Pełny graf dwudzielny jest grafem prostym dwudzielnym z dwupodziałem (X, Y), w którym każdy wierzchołek z X połączony jest z każdym wierzchołkiem Y. Jeżeli $|X| = m$, $|Y| = n$, to taki graf oznaczać będziemy $K_{m,n}$.

Przykład 1.5. Ile wierzchołków i ile krawędzi ma graf pełny dwudzielny $K_{m,n}$?

Przykład 1.6. Pokaż, że k-kostka jest grafem dwudzielnym.

Dopełnieniem G^c prostego grafu G (do grafu pełnego) nazywamy graf prosty o zbiorze wierzchołków $V(G)$ przy czym dwa wierzchołki są przyległe w G^c wtedy i tylko wtedy, gdy nie są one przyległe w G.

Przykład 1.7. Co możesz powiedzieć o grafach K_n^c, $K_{n,m}^c$?

Prosty graf jest **samodopełniający się** jeżeli $G \cong G^c$

Przykład 1.8. Pokaż, że jeżeli graf G jest samodopełniający, to $\nu \equiv 0, 1$ (mod 4).

1.3. Macierze incydencji i przyległości.

Jeżeli przez $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ oznaczymy wierzchołki a przez $e_1, e_2, \ldots, e_\varepsilon$ krawędzie grafu G, to macierz $\mathbf{M}(G) = [m_{ij}]$, $1 \leq i \leq \nu, 1 \leq j \leq \varepsilon$ gdzie liczba $m_{ij} = 0, 1,$ lub 2 oznacza ile razy v_i oraz e_j są incydentne (2 występuje w przypadku pętli), jest **macierzą incydencji** grafu G.

Inną macierzą związaną z grafem G jest **macierz przyległości** – jest to $\nu \times \nu$ macierz $\mathbf{A}(G) = [a_{ij}]$, gdzie a_{ij}, $i \neq j$, jest liczbą krawędzi łączących wierzchołki v_i i v_j a a_{ii} jest podwojoną liczbą pętli w wierzchołku v_i. Obie macierze w przypadku grafu prostego są oczywiście macierzami binarnymi.

Przykład 1.9. Dla grafu z Przykładu 1.1. mamy następującą macierz incydencji $\mathbf{M}(G)$ *oraz macierz przyległości* $\mathbf{A}(G)$*:*

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Obie macierze są bardzo wygodną (i ważną!) reprezentacją komputerową grafu G.

1.4. Podgrafy.

Graf H jest **podgrafem** grafu G ($H \subseteq G$), jeżeli $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ oraz ψ_H jest obcięciem ψ_G do $E(H)$. Jeżeli $H \subseteq G$, ale $H \neq G$, to H nazywamy **podgrafem właściwym** grafu G ($H \subset G$). Jeżeli H jest podgrafem G, to G jest **nadgrafem** grafu H.
Rozpięty podgraf (graf częściowy) grafu G jest podgrafem H, dla którego $V(H) = V(G)$. Jeżeli z grafu G usuniemy wszystkie pętle i dla każdej pary przyległych wierzchołków pozostawimy dokładnie jedną krawędź, to otrzymany w ten sposób rozpięty podgraf nazywamy **podległym grafem prostym grafu** G.

Przykład 1.10. Narysuj podległy graf prosty grafu z Przykładu 1.1.

Przypuśćmy, że V^* jest niepustym podzbiorem V. Podgraf grafu G, którego zbiorem wierzchołków jest V^*, oraz którego zbiór krawędzi składa się ze wszystkich krawędzi grafu G o obu końcach w V^* nazywamy **podgrafem indukowanym przez** V^* i oznaczamy przez $G[V^*]$. Podgraf $G[V - V^*]$ indukowany przez $V - V^*$ oznaczać będziemy także przez $G - V^*$ dla podkreślenia, że uzyskuje się go z grafu G poprzez usunięcie wierzchołków V^* (oczywiście wraz ze wszystkimi incydentnymi do nich krawędziami). Jeżeli $V^* = \{v\}$, to piszemy w skrócie $G - v$.
Załóżmy teraz, że $\emptyset \neq E^* \subset E$. Podgraf grafu G, którego zbiór wierzchołków stanowią końce krawędzi z E^* a zbiorem krawędzi jest E^* nazywamy **podgrafem indukowanym krawędziowo** przez E^* i oznaczamy przez $G[E^*]$. Rozpięty podgraf grafu G o zbiorze krawędzi $E - E^*$ (czyli podgraf grafu G otrzymany poprzez wyrzucenie krawędzi z E^*) zapisywać będziemy $G - E^*$ (Podobnie jak w przypadku wierzchołków dla $E^* = \{e\}$ używać będziemy zapisu $G - e$). Zauważyć tutaj należy, że podgrafy indukowane $G[E - E^*]$ oraz $G - E^*$ mogą się różnić – zbiory wierzchołków nie muszą być takie same.
Możemy również dodawać krawędzie do danego grafu tzn. rozpatrywać $G + E'$ ($G + e$), przy założeniu, że końce krawędzi z E' należą do V oraz $E' \cap E = \emptyset$.

Przykład 1.11. Narysuj podane niżej podgrafy grafu z Przykładu 1.1.

(1) $G[V \setminus \{v_2, v_5, v_8\}] = G - \{v_2, v_5, v_8\} = G[\{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7\}]$
(2) $G - v_3$
(3) $G - \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_9, e_{10}\}$
(4) $G[E - \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_9, e_{10}\}] = G[\{e_1, e_4, e_7, e_8\}$

Przykład 1.12. Wyjaśnij jak $\underline{M}(G - E')$, $\underline{M}(G[E - E'])$, $\underline{M}(G - V')$ *mogą być otrzymane z macierzy incydencji* $\underline{M}(G)$ *i jak* $\underline{A}(G - V')$ *z macierzy przyległości* $\underline{A}(G)$ *(*$E' \subset E$ *oraz* $V' \subset V$*).*

Przykład 1.13.

(a) *Pokaż, że jeżeli graf G jest grafem prostym, to $\varepsilon(G) \leq \binom{\nu(G)}{2}$. Dla jakiego grafu mamy równość w powyższej nierówności?*

(b) *Ile można utworzyć grafów prostych na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$, które mają dokładnie m krawędzi?*

(c) *Ile jest wszystkich grafów prostych na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$?*

Niech G_1 i G_2 będą podgrafami grafu G. Mówimy, że G_1 i G_2 są **rozłączne** (**wierzchołkowo rozłączne**) jeżeli nie mają wspólnych wierzchołków, natomiast **krawędziowe rozłączne** jeżeli nie mają wspólnych krawędzi. **Sumą** $G_1 \cup G_2$ podgrafów grafu G nazywamy podgraf grafu G o zbiorze wierzchołków $V(G_1) \cup V(G_2)$ i zbiorze krawędzi $E(G_1) \cup E(G_2)$. Jeżeli G_1 i G_2 są rozłączne to pisać będziemy $G_1 + G_2$. **Przekrojem** $G_1 \cap G_2$ nazywamy podgraf grafu G o zbiorze wierzchołków $V(G_1 \cap G_2) = V(G_1) \cap V(G_2)$ i zbiorze krawędzi $E(G_1 \cap G_2) = E(G_1) \cap E(G_2)$ przy czym zakładamy, że G_1 i G_2 nie są rozłączne tzn. $V(G_1 \cap G_2)$ jest niepusty.

1.5. Stopnie wierzchołków.

Stopniem $d(v) = d_G(v)$ **wierzchołka** v **w grafie** G nazywamy liczbę krawędzi grafu G incydentnych z v, przy czym każdą pętlę liczymy podwójnie. Przez $\delta(G)$ oraz $\Delta(G)$ rozumieć będziemy odpowiednio minimalny i maksymalny stopień wierzchołków grafu G.

Twierdzenie 1.1. $\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$.

Wniosek 1.1. *W dowolnym grafie, liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.*

Graf G nazywamy k-**regularnym** jeżeli dla każdego wierzchołka $v \in V$, $d(v) = k$. Graf jest **regularny**, gdy jest k-regularny dla pewnego k. Na przykład grafy $K_n, K_{n,n}$ są regularne (odpowiednio $(n-1)$- i n-regularne).

Przykład 1.14. Udowodnij, że izomorfizm zachowuje stopień wierzchołka.

Przykład 1.15. Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy proste o 5 wierzchołkach i 5 krawędziach.

ZADANIA I

Zadanie 1. Podaj przykład grafów prostych G i H o takiej samej liczbie wierzchołków i takiej samej liczbie krawędzi, które nie są izomorficzne.

Zadanie 2. Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy proste na 4 wierzchołkach.

Zadanie 3. Ile wierzchołków i ile krawędzi ma graf pełny trójdzielny $K_{\ell,n,m}$?

Zadanie 4. Pokaż, że jeżeli G jest grafem prostym i dwudzielnym, to $\varepsilon \leq \nu^2/4$.

Zadanie 5. Ile wierzchołków i ile krawędzi ma k-kostka?

Zadanie 6. Niech G będzie grafem dwudzielnym. Pokazać, że po ewentualnym przenumerowaniu wierzchołków

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{A_{12}} \\ \underline{A_{21}} & \underline{0} \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = A_{21}^T,$$

gdzie $\underline{A}$ jest macierzą przyległości grafu G.