Elementy logiki

Klasyczny rachunek predykatów

Wojciech Buszkowski

Zakład Teorii Obliczeń
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

2. Klasyczny Rachunek Predykatów

2.1. Wprowadzenie

Skrót: KRP

Inne nazwy: logika elementarna, logika pierwszego rzędu (ang. *first-order logic*, stąd skrót FOL).

Rozważmy wnioskowanie:

Każdy Polak jest Europejczykiem. Jan jest Polakiem. Zatem Jan jest Europejczykiem.

To wnioskowanie jest dedukcyjne, lecz nie można tego stwierdzić na gruncie KRZ. Schemat tego wnioskowania na gruncie KRZ to:

$$\frac{p;\ q}{r}$$

Oczywiście ten schemat nie jest logiczną regułą wnioskowania KRZ.

Na gruncie KRP wnikamy głębiej w strukturę zdań.

Oznaczamy:

$P(x)$: *x jest Polakiem*

$Q(x)$: *x jest Europejczykiem*

a : *Jan*

Otrzymujemy schemat:

$$\frac{\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x));\ P(a)}{Q(a)},$$

który jest logiczną regułą wnioskowania KRP.

To znaczy: dla każdej prawidłowej interpretacji symboli P, Q, a, jeżeli przesłanki tego schematu są prawdziwe, to wniosek jest prawdziwy.

W języku formalnym KRP występują następujące symbole.

Zmienne indywiduowe: x, y, z (ewentualnie z indeksami).

Zmienne indywiduowe *reprezentują* elementy pewnej dziedziny obiektów, będącej niepustym zbiorem.

Stałe indywiduowe: a, b, c (ewentualnie z indeksami).

Stałe indywiduowe *oznaczają* wyróżnione elementy dziedziny. Innymi słowy, grają rolę nazw własnych tych elementów. W języku polskim nazwami własnymi są np. *Warszawa*, *Lech Wałęsa*. W matematyce tę rolę grają symbole liczb, np. 0,1,2,. . ., π, e, symbole wyróżnionych zbiorów, np. $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ i inne.

Stałe logiczne: spójniki logiczne KRZ i kwantyfikatory $\forall$ i $\exists$.

$\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym* (generalnym, uniwersalnym, dużym). Inne oznaczenie: $\bigwedge$.

$\exists$ nazywamy *kwantyfikatorem szczegółowym* (egzystencjalnym, istnienia, małym). Inne oznaczenie: $\bigvee$.

Kwantyfikator zawsze występuje razem ze zmienną, np. $\forall x$, $\exists x$.

$\forall x$ czytamy: *dla każdego x.*

$\exists x$ czytamy: *istnieje x takie, że.*

Przykład. $\forall x \exists y (x < y)$ czytamy: *dla każdego x istnieje y takie, że x jest mniejsze od y.*

Symbole relacyjne: P, Q, R (ewentualnie z indeksami). Inna nazwa: symbole predykatowe.

Przyjmujemy, że każdy symbol relacyjny ma jednoznacznie określoną liczbę argumentów (argumentowość, arność), którą podajemy w deklaracji języka jako górny indeks, np. P^1 to jednoargumentowy (unarny) symbol relacyjny, Q^2 to dwuargumentowy (binarny) symbol relacyjny itp.

Argumentami symboli relacyjnych mogą być zmienne i stałe indywiduowe (również termy). Symbol relacyjny razem z argumentami tworzy formułę atomową (atom).

Przykład. Przykłady formuł atomowych, zbudowanych z symboli relacyjnych P^1, Q^1, R^2, zmiennych x, y i stałych indywiduowych a, b:

$P(a)$ - czytamy: P od a. $Q(x)$ - czytamy: Q od x. $R(x, y)$ - czytamy: R od x, y.

Formuła $P(a)$ wyraża stwierdzenie, że a ma własność P.

Formuła $R(x, y)$ wyraża stwierdzenie, że x jest w stosunku R do y.

Jednoargumentowe symbole relacyjne reprezentują *własności* elementów dziedziny.

Dwuargumentowe symbole relacyjne reprezentują *stosunki dwuczłonowe* między elementami dziedziny. W matematyce takimi symbolami są np. $=, <, \leq$.

Symbole relacyjne o większej liczbie argumentów reprezentują *stosunki wieloczłonowe*, np. $R(x, y, z)$: x leży między y i z (dziedzina to zbiór wszystkich punktów danej prostej).

W języku matematyki poza symbolami relacyjnymi stosuje się symbole funkcyjne.

Symbole funkcyjne: f, g, h (z indeksami).

Symbole funkcyjne reprezentują *operacje* (działania) określone na dziedzinie. W matematyce takimi symbolami są np. $+$, $\cdot$, sin.

Przyjmujemy, że każdy symbol funkcyjny ma jednoznacznie określoną liczbę argumentów, którą podajemy w deklaracji języka; np. f^1 to symbol jednoargumentowy, g^2 to symbol dwuargumentowy.

Uwaga. Dwuargumentowe symbole relacyjne i funkcyjne zwykle piszemy pomiędzy argumentami, np. piszemy $x = y$ zamiast $=(x, y)$ i $x + y$ zamiast $+(x, y)$. Jest to tzw. *notacja infiksowa*. W rozważaniach teoretycznych wszelkie symbole relacyjne i funkcyjne piszemy przed ich argumentami; jest to tzw. *notacja prefiksowa*.

Podstawowymi *wyrażeniami* języka KRP są termy i formuły.

Termy to wyrażenia poprawnie zbudowane ze zmiennych i stałych indywiduowych za pomocą symboli funkcyjnych.

Termy proste: zmienne i stałe indywiduowe.

Termy złożone: $f(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie f jest $n-$argumentowym symbolem funkcyjnym, a $t_1, \ldots, t_n$ są termami.

Przykład. Niech f^1, g^2 będą symbolami funkcyjnymi, a a, b stałymi indywiduowymi języka. Wtedy wyrażenia:

$$x, y, a, b, f(x), f(a), f(b), g(x, y), g(a, b), g(x, f(a)), f(g(x, f(b)))$$

są termami.

Termy oznaczają elementy dziedziny, jeżeli stałe indywiduowe są interpretowane jako nazwy wyróżnionych elementów, a zmiennym indywiduowym przypisano konkretne wartości w danej dziedzinie.

Formuły atomowe to wyrażenia $P(t_1, \ldots, t_n)$ takie, że P jest $n-$argumentowym symbolem relacyjnym, a $t_1, \ldots, t_n$ są termami.

Przykłady. Niech P^1, Q^2 będą symbolami relacyjnymi, f^1, g^2 symbolami funkcyjnymi, a a, b stałymi indywiduowymi. Przykładowe formuły atomowe to:

$$P(x), P(a), P(b), Q(x, y), Q(f(x), g(x, y)), P(g(x, f(b)))$$

Rozważmy język arytmetyki z symbolami relacyjnymi $=^2, <^2$, symbolami funkcyjnymi $+^2, \cdot^2$ i stałymi indywiduowymi $0, 1, 2, \ldots$.

Termami tego języka w notacji infiksowej są np. $x, y, 0, x + y, (x \cdot y) + z, x + (2 \cdot z)$. W notacji prefiksowej te same termy wyglądają tak: $x, y, 0, +(x, y), +(\cdot(x, y), z), +(x, \cdot(2, z))$.

Formułami atomowymi tego języka w notacji infiksowej są np. $x = y, x < 2, 2 + 1 = 3, 2 + 2 = 3$; w notacji prefiksowej te formuły wyglądają tak $= (x, y), < (x, 2), = (+(2, 1), 3), = (+(2, 2), 3)$.

Formuły to wyrażenia poprawnie zbudowane z formuł atomowych za pomocą spójników logicznych KRZ i kwantyfikatorów.

Formuły złożone:
$(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi), (\forall x\varphi), (\exists x\varphi)$, gdzie φ, ψ są formułami.

Zamiast $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ piszemy też $\forall_x\varphi$, $\exists_x\varphi$.

W zapisie formuł pomijamy nawiasy zewnętrzne oraz niektóre nawiasy wewnętrzne, przyjmując siłę wiązania spójników logicznych jak w KRZ oraz nadając kwantyfikacjom $\forall x$, $\exists x$ tę samą siłę, co negacji.

Przykład. Napis $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ przedstawia formułę:

$$((\forall xP(x)) \wedge (\forall xQ(x))) \Leftrightarrow (\forall x(P(x) \wedge Q(x)))$$

Formuły to wyrażenia zdaniowe, a termy to wyrażenia nazwowe.

2.2. Podformuły. Zmienne wolne i związane. Podstawianie.

$\varphi * \psi$ oznacza dowolną formułę postaci $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$, jeżeli nie ma znaczenia, który spójnik dwuargumentowy wystepuje w formule. Podobnie $Kx\varphi$ oznacza dowolną formułę postaci $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$.

Złożoność formuły określamy jako liczbę wszystkich wystąpień stałych logicznych w tej formule.

Wiele definicji i dowodów twierdzeń dotyczących formuł (ogólnie: wyrażeń formalnych) przebiega przez indukcję po złożoności.

Definicja 1 (podformuła danej formuły).

(a) Podformułą formuły atomowej jest tylko ta formuła.

(b) Podformułą formuły $\neg\varphi$ jest ta formuła i każda podformuła formuły φ; podobnie dla formuły $Kx\varphi$.

(c) Podformułą formuły $\varphi * \psi$ jest ta formuła, każda podformuła formuły φ i każda podformuła formuły ψ.

Przykład. Podformułami formuły $\neg\forall x P(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x)$ są: ta formuła, $\neg\forall x P(x)$, $\forall x P(x)$, $P(x)$, $\exists x \neg P(x)$ i $\neg P(x)$. Zauważmy, że ta formuła zawiera dwa wystąpienia podformuły $P(x)$.

Jeżeli $Kx\psi$ jest wystąpieniem podformuły w formule φ, to dane wystąpienie ψ nazywamy zasięgiem danego wystąpienia kwantyfikacji Kx w formule φ.

Przykład. W powyższym przykładzie, zasięgiem $\forall x$ jest pierwsze wystąpienie $P(x)$, a zasięgiem $\exists x$ jest jedyne wystąpienie $\neg P(x)$.

Definicja 2 (związane i wolne wystąpienia zmiennej). Wystąpienie zmiennej x w formule φ nazywamy *związanym*, jeżeli wchodzi w skład pewnej podformuły $Kx\psi$ formuły φ. Wystąpienie zmiennej, które nie jest związane, nazywamy *wolnym* w danej formule. Mówimy, że zmienna jest *wolna* (odp. *związana*) w danej formule, jeżeli ta formuła zawiera przynajmniej jedno wolne (odp. związane) wystąpienie tej zmiennej.

Przykład. W formule $P(x) \Rightarrow \exists x Q(x, y)$ pierwsze wystąpienie x i jedyne wystąpienie y są wolne, a drugie i trzecie wystąpienie x są związane. Zatem zmienne wolne w tej formule to x, y, a jedyną zmienną związaną jest x.

UWAGA. W praktyce unikamy formuł, w których ta sama zmienna jest wolna i związana. Powyższa formuła jest logicznie równoważna formule $P(x) \Rightarrow \exists z Q(z, y)$, ponieważ zmienną związaną można zamienić na inną (z pewnymi ograniczeniami).

Role zmiennych wolnych i związanych są inne. Wartość logiczna formuły zależy od wartości zmiennych wolnych, lecz nie zależy od wartości zmiennych związanych.

Rozważmy formułę $\exists y (y < x)$ języka arytmetyki liczb naturalnych $0, 1, 2, \ldots$. Ta formuła jest prawdziwa w dziedzinie liczb naturalnych, jeżeli wartością x jest liczba dodatnia, lecz fałszywa, jeżeli wartością x jest 0. Wartość logiczna tej formuły nie zależy od wartości zmiennej związanej y.

Definicja 3. Formuły nie zawierające zmiennych wolnych nazywamy *zdaniami* (albo: formułami domkniętymi).

Przykład. Zdania *atomowe* to formuły atomowe nie zawierające zmiennych, np. $P(a)$, $Q(a, b)$, $Q(f(a), g(a, b))$, czy też $1 = 2$, $1 < 2$, $2 + 1 = 3$ w języku arytmetyki.

Zdania *złożone* to albo kombinacje zdań atomowych za pomocą spójników logicznych KRZ, albo formuły, zawierające zmienne, ale tylko zmienne związane, np. $\neg P(a) \vee Q(a, b)$, $\forall x \neg P(x) \Rightarrow \neg \exists x P(x)$.

UWAGA. W zależności od zastosowań przyjmujemy różne symbole relacyjne, funkcyjne i stałe indywiduowe; pozostałe symbole są zawsze takie same. Wobec tego konkretny język formalny KRP, zwany też językiem elementarnym, można całkowicie scharakteryzować, wymieniając wszystkie symbole relacyjne, symbole funkcyjne i stałe indywiduowe, np. podając listy odpowiednich symboli.

Istotną rolę odgrywa podstawianie termów za zmienne.

Definicja 4. *Podstawieniem* nazywamy skończoną listę

$$\sigma = [x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$$

taką, że $x_1, \ldots, x_n$ są różnymi zmiennymi indywiduowymi, a $t_1, \ldots, t_n$ są termami.

Dopuszczamy *podstawienie puste* (identycznościowe): $\varepsilon = [\,]$.

Przez $t\sigma$ (odp. $\varphi\sigma$) oznaczamy wynik podstawienia σ w termie t (odp. formule φ), tj. term otrzymany w wyniku podstawienia termu t_i za każde wystąpienie x_i w t (odp. formułę otrzymaną w wyniku podstawienia t_i za każde wolne wystąpienie x_i w φ) dla $i = 1, \ldots, n$.

Przykład. $((x + y) \cdot x)[x/y,\ y/z + 1] \equiv (y + (z + 1)) \cdot y$.

$(\exists x(x = y))[x/y,\ y/z + 1] \equiv \exists x(x = z + 1)$.

Symbolem $\equiv$ oznaczamy równość wyrażeń.

Definicja 5. Mówimy, że term t jest *podstawialny* za zmienną x w formule φ, jeżeli żadne wolne wystąpienie x w φ nie występuje w podformule postaci $Ky\psi$ takiej, że y występuje w t.

Przykład. Niech $\varphi \equiv \exists y(x < y)$. Wtedy t jest podstawialne za x w φ wtw, gdy y nie występuje w t. Na przykład, z, $z + x$, 0 są podstawialne za x w φ, lecz y, $y + 1$ nie są podstawialne za x w φ.

Zauważmy, że formuła φ jest prawdziwa w dziedzinie liczb całkowitych dla wszystkich wartości x. Jeżeli t jest podstawialne za x w φ, to formuła $\varphi[x/t]$ jest też prawdziwa w tej dziedzinie, np. $\exists y(z < y)$, $\exists y(z + x < y)$, $\exists y(0 < y)$. Jeżeli t nie jest podstawialne za x w φ, to $\varphi[x/t]$ może nie być formułą prawdziwą w tej dziedzinie, np. $\exists y(y < y)$, $\exists y(y + 1 < y)$. Jeżeli t nie jest podstawialne za x w φ, to mówimy, że nastąpiła *kolizja zmiennych* przy podstawianiu $\varphi[x/t]$.

Każdy term bez zmiennych jest podstawialny za dowolną zmienną w dowolnej formule. Każdy term jest podstawialny za dowolną zmienną w dowolnej formule, nie zawierającej kwantyfikatorów.

2.3. Prawa KRP, równoważność logiczna i wynikanie logiczne w KRP

Interpretacja języka elementarnego polega na ustaleniu niepustego zbioru, zwanego *dziedziną* lub *uniwersum* interpretacji, oraz nadaniu znaczenia wszystkim symbolom relacyjnym, symbolom funkcyjnym i stałym indywiduowym języka.

Symbole relacyjne interpretujemy jako nazwy wyróżnionych relacji (stosunków) między elementami dziedziny.

Symbole funkcyjne interpretujemy jako nazwy wyróżnionych operacji (działań) określonych na dziedzinie, tzn. przyjmujących zarówno argumenty jak i wartości w tej dziedzinie.

Stałe indywiduowe interpretujemy jako nazwy wyróżnionych elementów dziedziny.

Przykład. Rozważmy język z symbolami relacyjnymi $R^2, =^2$ i symbolami funkcyjnymi f^1, g^1.

Niech dziedziną interpretacji M będzie zbiór wszystkich ludzi. Nadajemy znaczenie symbolom.

$R^M(x, y)$: x i y są rodzeństwem

$x =^M y$: x jest równe y (x jest tą samą osobą, co y)

$f^M(x)$: matka osoby x

$g^M(x)$: ojciec osoby x

Zdanie:

$\forall x \forall y (R(x, y) \Leftrightarrow \neg(x = y) \wedge f(x) = f(y) \wedge g(x) = g(y))$

jest *prawdziwe* w tej interpretacji.

Zdanie $\forall x \exists y (x = f(y))$ jest *fałszywe* w tej interpretacji.

Inną interpretacją tego samego języka jest M', która różni się od M tylko znaczeniem symbolu R.

$R^{M'}(x,y) : x$ jest osobą młodszą od y

Oczywiście pierwsze z powyższych zdań jest fałszywe w M'.

Istnieje nieskończenie wiele możliwych interpretacji danego języka elementarnego, które różnią się dziedzinami i znaczeniem symboli. Na ogół zdanie języka jest prawdziwe w jednych, lecz fałszywe w innych interpretacjach.

Formuła ze zmiennymi wolnymi, np. $x < y$, może być prawdziwa albo fałszywa w danej interpretacji w zależności od wartości przypisanych zmiennym wolnym. Wprowadzimy pojęcie wartościowania zbioru zmiennych indywiduowych V.

Wartościowaniem zbioru V w danej interpretacji nazywamy dowolną funkcję, która zmiennym ze zbioru V przyporządkowuje elementy dziedziny tej interpretacji.

Każde zdanie języka jest prawdziwe albo fałszywe w danej interpretacji tego języka. Każda formuła języka jest prawdziwa albo fałszywa w danej interpretacji tego języka przy ustalonym wartościowaniu zmiennych wolnych tej formuły.

Wygodnie jest przyjąć, że formuła jest prawdziwa w interpretacji M, jeżeli jest prawdziwa w M przy każdym wartościowaniu zmiennych wolnych tej formuły.

Fakt 1. Formuła φ ze zmiennymi wolnymi $x_1 \ldots, x_n$ jest prawdziwa w interpretacji M wtw, gdy zdanie $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \varphi$ jest prawdziwe w interpretacji M.

To zdanie nazywamy generalizacją formuły φ.

Uwaga. Pojęcia interpretacji oraz prawdziwości zdania i formuły nie zostały zdefiniowane precyzyjnie. Ścisłe definicje mogą być sformułowane na gruncie teorii mnogości. Dla naszych potrzeb wystarczą powyższe, nie całkiem ścisłe definicje.

Definicja 6. *Prawem KRP* nazywamy formułę, która jest prawdziwa we wszystkich interpretacjach danego języka.

Prawa KRP są też nazywane *tautologiami KRP*.

Przykład. Prawami KRP są prawa podstawiania:

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(a); \; P(a) \Rightarrow \exists x P(x)$$

Pierwsze prawo podstawiania stwierdza, że jeżeli każdy element dziedziny interpretacji M ma własność P^M, to element a^M ma własność P^M.

Drugie prawo podstawiania stwierdza, że jeżeli element a^M ma własność P^M, to istnieje element dziedziny interpretacji M, mający własność P^M.

Oczywiście te zdania są prawdziwe w każdej interpretacji. Ich prawdziwość jest konsekwencją znaczenia stałych logicznych $\forall, \exists, \Rightarrow$, niezależnie od własności konkretnej interpretacji.

Prawami KRP są też formuły:

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(y); \;\; P(y) \Rightarrow \exists x P(x)$$

gdzie x, y są dowolnymi zmiennymi (dopuszczamy $x \equiv y$).

Ogólniej, dla dowolnego termu t prawami KRP są formuły:

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(t); \;\; P(t) \Rightarrow \exists x P(x)$$

Jeszcze ogólniej, dla dowolnych formuł φ, zmiennych x i termów t podstawialnych za x w φ prawami KRP są formuły:

$$\forall x \varphi \Rightarrow \varphi[x/t]; \;\; \varphi[x/t] \Rightarrow \exists x \varphi$$

Jest to najogólniejsza postać *praw podstawiania*.

Lista podstawowych praw KRP

(TL0) wszystkie formuły logicznie prawdziwe na gruncie KRZ

Przykład.

$\exists x P(x) \Rightarrow Q(y) \vee \exists x P(x)$.

Schemat logiczny na gruncie KRZ: $p \Rightarrow q \vee p$ (tautologia).

prawa podstawiania

(TL1a) $\forall x \varphi \Rightarrow \varphi[x/t]$, (TL1e) $\varphi[x/t] \Rightarrow \exists x \varphi$ (warunek: t jest podstawialne za x w φ)

Przykłady.

(TL1a) $\forall x(x < x + 1) \Rightarrow x^2 < x^2 + 1$

(TL1e) $0 < 1 \Rightarrow \exists x(x < 1)$

prawa zbędnego kwantyfikatora

(TL2a) $\forall x\varphi \Leftrightarrow \varphi$, (TL2e) $\exists x\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (warunek: x nie jest wolne w φ)

Przykłady.

(TL2a) $\forall x P(y) \Leftrightarrow P(y)$, (TL2e) $\exists x P(y) \Leftrightarrow P(y)$

prawa dwustronnego dołączania kwantyfikatorów do implikacji

(TL3a) $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x\varphi \Rightarrow \forall x\psi)$

(TL3e) $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\exists x\varphi \Rightarrow \exists x\psi)$

Przykłady.

(TL3a) $\forall x(x \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0) \Rightarrow (\forall x(x \geq 0) \Rightarrow \forall x(x + 1 \geq 0))$

(TL3e) $\forall x(x \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0) \Rightarrow (\exists x(x \geq 0) \Rightarrow \exists x(x + 1 \geq 0))$

prawa jednostronnego dołączania kwantyfikatora do implikacji

(TL4a) $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \forall x \psi)$ (warunek: x nie jest wolne w φ)

(TL4e) $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\exists x \varphi \Rightarrow \psi)$ (warunek: x nie jest wolne w ψ)

Przykłady.

(TL4a) $\forall x(y \leq 0 \Rightarrow y \leq x^2) \Rightarrow (y \leq 0 \Rightarrow \forall x(y \leq x^2))$

(TL4e) $\forall x(x^2 \leq y \Rightarrow 0 \leq y) \Rightarrow (\exists x(x^2 \leq y) \Rightarrow 0 \leq y)$

prawa rozdzielności kwantyfikatorów

(TL5a) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$

(TL5e) $\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

Każda studentka zaliczyła ćwiczenia i zdała egzamin wtw,gdy każda studentka zaliczyła ćwiczenia i każda studentka zdała egzamin.

Pewien student nie zaliczył ćwiczeń lub nie zdał egzaminu wtw, gdy pewien student nie zaliczył ćwiczeń lub pewien student nie zdał egzaminu.

niepełne prawa rozdzielności kwantyfikatorów

(TL6a) $\forall x\varphi \vee \forall x\psi \Rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$

(TL6e) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$

Przeciwne implikacje na ogół nie są prawami KRP.

$\forall x(x = 0 \vee x \neq 0) \Rightarrow \forall x(x = 0) \vee \forall x(x \neq 0)$ fałsz

$\exists x(x = 0) \wedge \exists x(x \neq 0) \Rightarrow \exists x(x = 0 \wedge x \neq 0)$ fałsz *prawa przestawiania kwantyfikatorów*

(TL7a) $\forall x \forall y \varphi \Leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$

(TL7e) $\exists x \exists y \varphi \Leftrightarrow \exists y \exists x \varphi$

W formułach postaci $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi$ kolejność kwantyfikacji nie ma znaczenia. Podobnie dla $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \varphi$.

niepełne prawo przestawiania kwantyfikatorów

(TL8) $\exists x \forall y \varphi \Rightarrow \forall y \exists x \varphi$

Przykład. $\exists x \forall y (x \leq y) \Rightarrow \forall y \exists x (x \leq y)$

Przeciwna implikacja na ogół nie jest prawem KRP.

$\forall y \exists x (x < y) \Rightarrow \exists x \forall y (x < y)$ fałsz w dziedzinie liczb całkowitych *prawa De Morgana dla kwantyfikatorów*

(TL9a) $\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$

(TL9e) $\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

Nieprawda, że każda studentka zaliczyła ćwiczenia, wtw, gdy pewna studentka nie zaliczyła ćwiczeń.

Nieprawda, że pewna studentka oblała egzamin, wtw, gdy żadna (każda) studentka nie oblała egzaminu.

prawa zamiany zmiennej związanej

(TL10a) $\forall x\varphi \Leftrightarrow \forall y\varphi[x/y]$

(TL10e) $\exists x\varphi \Leftrightarrow \exists y\varphi[x/y]$,

jeśli spełnione są warunki: (w1) $x \not\equiv y$, (w2) y nie jest wolne w φ (w3) y jest podstawialne za x w φ. Te warunki są spełnione, gdy y nie występuje w $\forall x\varphi$ (jest tzw. nową zmienną).

$\forall x\exists y(x < y) \Leftrightarrow \forall z\exists y(z < y)$, $\exists x\forall y(x \leq y) \Leftrightarrow \exists z\forall y(z \leq y)$

prawa wyłączania kwantyfikatora przed nawias

(TL11a) $\forall x\varphi * \psi \Leftrightarrow \forall x(\varphi * \psi)$ jeśli $* \in \{\wedge, \vee\}$ i x nie jest wolne w ψ,

(TL11e) $\exists x\varphi * \psi \Leftrightarrow \exists x(\varphi * \psi)$ przy tych samych zastrzeżeniach.

Przykład.

$\forall x(y \leq x^2) \vee y > 0 \Leftrightarrow \forall x(y \leq x^2 \vee y > 0)$

prawa ekstensjonalności dla kwantyfikatorów

(TL12a) $\forall x(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x\varphi \Leftrightarrow \forall x\psi)$

(TL12e) $\forall x(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\exists x\varphi \Leftrightarrow \exists x\psi)$

Analogiczne prawa KRZ:

$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$

$(p_1 \Leftrightarrow q_1) \wedge (p_2 \Leftrightarrow q_2) \Rightarrow ((p_1 * p_2) \Leftrightarrow (q_1 * q_2))$

Definicja 7. Mówimy, że formuła φ jest *logicznie równoważna* formule ψ w KRP, jeżeli formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest prawem KRP.

Przykłady. Formuła $\neg\forall x\varphi$ jest logicznie równoważna formule $\exists x\neg\varphi$. Formuła $\forall x(\varphi \wedge \psi)$ jest logicznie równoważna formule $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi$.

Definicja 8. Interpretację M nazywamy *modelem* zbioru formuł S danego języka, jeżeli każda formuła z S jest prawdziwa w M.

Przykłady. Każda interpretacja danego języka jest modelem dowolnego zbioru praw KRP, sformułowanych w tym języku.

Interpretacja M jest modelem zbioru:

$$\{\exists x P(x),\ \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))\}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden element dziedziny ma własność P^M i każdy element mający własność P^M ma własność Q^M.

Definicja 9. Mówimy, że formuła ψ *wynika logicznie* ze zbioru formuł S w KRP, jeżeli ψ jest prawdziwe we wszystkich modelach zbioru S.

Fakt 2. Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ będą zdaniami. Formuła ψ wynika logicznie z formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (tzn. ze zbioru $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$) wtw, gdy formuła $\varphi_1 \land \cdots \land \varphi_n \Rightarrow \psi$ jest prawem KRP.

Uwaga. Implikacja $\Leftarrow$ jest prawdziwa dla dowolnych formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Implikacja $\Rightarrow$ nie zawsze jest prawdziwa, gdy nie wszystkie formuły $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ są zdaniami.

Przykład (ważny). Dla dowolnej interpretacji M, jeżeli $P(x)$ jest prawdziwe w M, to $\forall x P(x)$ jest prawdziwe w M, a więc $\forall x P(x)$ wynika logicznie z $P(x)$.

Formuła $P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$ nie jest prawem KRP. Nie jest prawdziwa w takiej interpretacji M, której pewien element e ma własność P^M, lecz nie każdy element ma tę własność.

Jak w KRZ, schemat wnioskowania

$$\text{(SW)}\ \frac{\varphi_1; \ldots; \varphi_n}{\psi}$$

nazywamy logiczną regułą wnioskowania KRP, jeżeli wniosek ψ wynika logicznie z przesłanek $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Pierwszą grupę logicznych reguł wnioskowania KRP stanowią wszystkie schematy (SW) takie, że formuła $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$ jest prawem KRP. Do tej grupy należą wszystkie logiczne reguły wnioskowania KRZ; dokładniej: reguły powstające z logicznych reguł wnioskowania KRZ przez podstawienie dowolnych formuł języka elementarnego za zmienne zdaniowe. Na przykład:

$$\text{(MP)}\ \frac{\varphi \Rightarrow \psi;\ \varphi}{\psi},\ \text{(SYL)}\ \frac{\varphi \Rightarrow \psi;\ \psi \Rightarrow \chi}{\varphi \Rightarrow \chi},$$

gdzie φ, ψ, χ oznaczają dowolne formuły języka elementarnego.

Oczywiście te reguły odpowiadają prawom KRP z grupy (TL0), tzn. prawom powstającym z tautologii KRZ przez podstawianie dowolnych formuł języka elementarnego za zmienne zdaniowe.

Do pierwszej grupy należą też reguły odpowiadające innym prawom KRP. Na przykład, prawom (TL1a), (TL1e) odpowiadają reguły:

$$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[x/t]}, \quad \frac{\varphi[x/t]}{\exists x \varphi}; \text{ warunek: jak dla (TL1)}$$

Druga grupa składa się z reguł, które nie odpowiadają prawom KRP. Wymienimy dwie ważne reguły: *regułę generalizacji* (GEN) i *regułę podstawiania* (POD):

$$\text{(GEN)} \ \frac{\varphi}{\forall x \varphi}, \ \text{(POD)} \ \frac{\varphi}{\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]},$$

pod warunkiem, że t_i jest podstawialne za x_i w φ dla $i = 1, \ldots, n$.

WYJAŚNIENIE. Reguły pierwszej grupy zachowują prawdziwość w interpretacji M dla ustalonych wartości zmiennych wolnych: jeżeli przesłanki reguły są prawdziwe w M dla danych wartości zmiennych wolnych, to wniosek reguły też ma tę własność.

Reguły drugiej grupy zachowują prawdziwość w interpretacji M: jeżeli przesłanki reguły są prawdziwe w M, to wniosek reguły jest prawdziwy w M.

Wobec tego, reguły z obu grup zachowują prawdziwość w M.

W konsekwencji, jeżeli przesłanki reguły są prawami KRP, to wniosek reguły jest prawem KRP.

2.4. Dedukcja w KRP

Formalny system dedukcyjny KRP można oprzeć na aksjomatach:

(TL0), (TL1a), (TL1e), (TL2a), (TL2e), (TL3a), (TL3e)

i podstawowych regułach dowodzenia MP i GEN.

Zauważmy, że każda reguła, której schemat na gruncie KRZ jest logiczną regułą wnioskowania KRZ, jest wyprowadzalna w KRP.

Przykład. Rozważmy regułę SYL. W KRP mamy dowód.

1. $\varphi \Rightarrow \psi$ założenie
2. $\psi \Rightarrow \chi$ założenie
3. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow [(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)]$ (TL0)
4. $\varphi \Rightarrow \chi$ 2×MP 3,1,2.

W tym systemie można udowodnić wszystkie prawa i logiczne reguły wnioskowania KRP.

Przykładowo udowodnimy prawo (TL4a). Zakładamy, że x nie jest wolne w φ.

1. $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x\varphi \Rightarrow \forall x\psi)$ aks. (TL3a)

2. $\forall x\varphi \Leftrightarrow \varphi$ aks. (TL2a)

3. $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \forall x\psi)$ RZ 1,2

W ostanim kroku zastosowano regułę KRZ:

$$\frac{p \Rightarrow (q \Rightarrow r);\ q \Leftrightarrow q'}{p \Rightarrow (q' \Rightarrow r)}\ .$$

Podobnie można udowodnić (TL4e).

Udowodnimy *reguły dwustronnego dołączania kwantyfikatorów do implikacji*.

$$\text{(DD}\forall\text{)}\ \frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\forall x\varphi \Rightarrow \forall x\psi} \quad \text{(DD}\exists\text{)}\ \frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\exists x\varphi \Rightarrow \exists x\psi}$$

Są to reguły drugiej grupy, więc można je stosować, jeżeli przesłanka jest prawdziwa dla wszystkich wartości zmiennych wolnych.

1. $\varphi \Rightarrow \psi$ założenie

2. $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$ GEN 1

3. $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x\varphi \Rightarrow \forall x\psi)$ aks. (TL3a)

4. $\forall x\varphi \Rightarrow \forall x\psi$ MP 3, 2

Dowód reguły (DD$\exists$) jest podobny: trzeba skorzystać z aksjomatu (TL3e).

Udowodnimy (TL5a): $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$.

1. $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ RZ (tzn. aks. (TL0))
2. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \forall x\varphi$ DD$\forall$ 1
3. $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$ RZ
4. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \forall x\psi$ DD$\forall$ 3
5. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ RZ 2, 4
6. $\forall x\varphi \Rightarrow \varphi$ aks. (TL1a) (dla $t \equiv x$)
7. $\forall x\psi \Rightarrow \psi$ aks. (TL1a)
8. $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$ RZ 6, 7
9. $\forall x(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi) \Rightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$ DD$\forall$ 8
10. $\forall x(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ aks. (TL2a)
11. $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \Rightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$ RZ 9, 10
12. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ RZ 5, 11

Najczęściej stosujemy prawa i reguły KRP do konkretnych formuł.

Powróćmy do schematu wnioskowania:

$$\frac{\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x));\ \ P(a)}{Q(a)}$$

Prawem KRP postaci (TL1a) (*prawo podstawiania*) jest zdanie:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(a) \Rightarrow Q(a))\,,$$

które jest logicznie równoważne zdaniu:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$$

Wobec tego ostatnie zdanie jest prawem KRP, a więc powyższy schemat wnioskowania jest logiczną regułą wnioskowania KRP.

Przekształcenia równoważnościowe

Jeżeli formuła φ jest logicznie równoważna formule ψ, to zastąpienie φ przez ψ w dowolnej formule χ prowadzi do formuły χ' logicznie równoważnej formule χ.

Dowód równoważnościowy prawa $\chi \Leftrightarrow \chi'$ polega na kilkakrotnym, kolejnym wykonaniu takich zastąpień. Takie postępowanie jest analogiczne do sprowadzania formuł KRZ do postaci normalnej metodą przekształceń równoważnościowych.

$$(\forall x\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \exists x(\varphi \Rightarrow \psi) \text{ (warunek: } x \text{ nie jest wolne w } \psi)$$

$(\forall x\varphi \Rightarrow \psi) \leftrightarrow^{RZ} \neg\forall x\varphi \vee \psi \leftrightarrow^{(TL9)} \exists x\neg\varphi \vee \psi$

$\leftrightarrow^{(TL11)} \exists x(\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow^{RZ} \exists x(\varphi \Rightarrow \psi)$

$$(\varphi \Rightarrow \forall x\psi) \Leftrightarrow \forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \text{ (warunek: } x \text{ nie jest wolne w } \varphi)$$

$$(\varphi \Rightarrow \forall x\psi) \leftrightarrow^{RZ} \neg\varphi \vee \forall x\psi \leftrightarrow^{(TL11),RZ} \forall x(\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow^{RZ} \forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$$

Tą metodą możemy każdą formułę sprowadzić do *preneksowej postaci normalnej*: $K_1x_1 \ldots K_nx_n\psi$, gdzie ψ jest formułą bez kwantyfikatorów (*formułą otwartą*).

$\forall xP(x) \vee \neg\forall xQ(x) \leftrightarrow \forall xP(x) \vee \exists x\neg Q(x)$

$\leftrightarrow^{(TL10)} \forall xP(x) \vee \exists y\neg Q(y)$

$\leftrightarrow \forall x(P(x) \vee \exists y\neg Q(y)) \leftrightarrow \forall x\exists y(P(x) \vee \neg Q(y))$

Zamiana zmiennej związanej x na y jest potrzebna, żeby kwantyfikację $\exists y$ wyłączyć przed nawias zgodnie z (TL11).

Kwantyfikatory ograniczone

Często ograniczamy zakres kwantyfikatora do elementów spełniających pewien warunek, np. $\forall x > 1$, $\exists x \in X$. Warunkiem ograniczającym może być dowolna formuła W; wtedy piszemy $\forall_{x:W}$, $\exists_{x:W}$ (czytamy: *dla kazdego x, spełniającego W*; *istnieje x, spełniające W*). Przyjmujemy następujące definicje:

$$\forall_{x:W}\varphi \Leftrightarrow \forall x(W \Rightarrow \varphi)$$

$$\exists_{x:W}\varphi \Leftrightarrow \exists x(W \wedge \varphi)$$

Prawa (TL3)-(TL6), (TL9) i (TL12) zachowują ważność dla kwantyfikatorów ograniczonych. Wyprowadzimy odpowiednik (TL5a).

$$\forall_{x:W}(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x(W \Rightarrow \varphi \wedge \psi)$$

$$\leftrightarrow^{RZ} \forall x((W \Rightarrow \varphi) \wedge (W \Rightarrow \psi)) \leftrightarrow^{(TL5)} \forall x(W \Rightarrow \varphi) \wedge \forall x(W \Rightarrow \psi)$$

$$\leftrightarrow \forall_{x:W}\varphi \wedge \forall_{x:W}\psi$$

Prawa (TL1) przyjmują postać:

$\forall_{x:W}\varphi \Rightarrow (W[x/t] \Rightarrow \varphi[x/t]),\ W[x/t] \wedge \varphi[x/t] \Rightarrow \exists_{x:W}\varphi$

pod warunkiem, że term t jest podstawialny za x w φ i W. Prawa (TL2) i (TL11) wymagają założenia $\exists xW$. Prawa (TL10) przyjmują postać:

$\forall_{x:W}\varphi \Leftrightarrow \forall_{y:W[x/y]}\varphi[x/y],\ \exists_{x:W}\varphi \Leftrightarrow (\exists_{y:W[x/y]}\varphi[x/y]$

pod warunkiem, że (w1) $x \not\equiv y$, (w2) y nie jest wolne w φ, ani W, (w3) y jest podstawialne za x w φ i W. Wreszcie dwukwantyfikatorowe prawa (TL7), (TL8) dopuszczają różne warunki ograniczające dla zmiennych x, y i przyjmują postać:

$\forall_{x:V}\forall_{y:W}\varphi \Leftrightarrow \forall_{y:W}\forall_{x:V}\varphi;\ \exists_{x:V}\exists_{y:W}\varphi \Leftrightarrow \exists_{y:W}\exists_{x:V}\varphi;\ \exists_{x:V}\forall_{y:W}\varphi \Rightarrow \forall_{y:W}\exists_{x:V}\varphi$

pod warunkiem, że x nie jest wolne w W, a y nie jest wolne w V.

Dowody założeniowe

Dowód założeniowy twierdzenia $\varphi \Rightarrow \psi$ polega na udowodnieniu ψ przy założeniu φ.

Podamy założeniowy dowód prawa:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x \neg Q(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x))$$

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ założenie
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x))$ prawo (TL1)
3. $P(x) \Rightarrow Q(x)$ MP 2, 1
4. $\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$ RZ 3
5. $\exists x \neg Q(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x)$ DD$\exists$ 4

Uwaga. W powyższym dowodzie założenie $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ jest zdaniem, czyli formułą domkniętą. Jeżeli założenie jest zdaniem, to w dowodzie założeniowym można bez ograniczeń stosować wszystkie reguły KRP.

W przypadku, gdy założenie zawiera zmienne wolne, to w całym dowodzie należy te zmienne traktować jako *ustalone*: nie wolno stosować reguły (GEN), ani reguł pochodnych od (GEN), czyli (DD$\forall$), (DD$\exists$), z kwantyfikatorami działającymi na te zmienne.

Ogólnie, nie wolno stosować reguł z drugiej grupy, czyli logicznych reguł wnioskowania KRP, które nie odpowiadają prawom KRP, jeżeli te reguły istotnie działają na zmienne wolne w założeniu, np. reguły podstawiania (POD) z podstawieniem $[x/t]$, gdzie x jest zmienną wolną w założeniu.

Nie przestrzegając tego zakazu, moglibyśmy udowodnić $P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$, zakładając $P(x)$ i stosując (GEN), a wyjaśniono wcześniej, że ta formuła nie jest prawem KRP.

2.5. KRP z równością (KRPR)

Język elementarny zawiera symbol relacyjny $=^2$, interpretowany jako *relacja równości* (identyczności) we wszystkich interpretacjach tego języka.

Aksjomaty równości

(R1) $x = x$ (prawo zwrotności równości)

(R2) $x = y \Rightarrow y = x$ (prawo symetrii równości)

(R3) $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$ (prawo przechodniości równości)

(R4) $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$

(R5) $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \Rightarrow (P(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n))$

(R4) przyjmujemy dla każdego symbolu funkcyjnego f danego języka (n jest liczbą argumentów symbolu f). (R5) przyjmujemy dla każdego symbolu relacyjnego P danego języka (n jest liczbą argumentów symbolu P).

KRPR to KRP wzbogacony o aksjomaty równości.

W KRPR można udowodnić *twierdzenia o równości*.

(TR1) $s = t \Rightarrow u[x/s] = u[x/t]$

dla dowolnych termów s, t, u i zmiennych x.

Przykład. $y + 1 = z \Rightarrow (y + 1) + y = z + y$.

Tu $s \equiv y + 1$, $t \equiv z$, $u \equiv x + y$.

Wtedy $u[x/s] \equiv (y + 1) + y$, $u[x/t] = z + y$.

(TR2) $s = t \Rightarrow (\varphi[x/s] \Leftrightarrow \varphi[x/t])$

dla dowolnych formuł φ, zmiennych x i termów s, t podstawialnych za x w φ.

Przykład. $y + 1 = z \Rightarrow (y + 1 < 3 \Leftrightarrow z < 3)$.

Tu $\varphi \equiv x < 3$.

(TR3) $\varphi[x/t] \Leftrightarrow \exists x(x = t \wedge \varphi)$

(TR3') $\varphi[x/t] \Leftrightarrow \forall x(x = t \Rightarrow \varphi)$

dla dowolnych formuł φ, zmiennych x i termów t pod warunkiem, że: (1) x nie występuje w t, (2) t jest podstawialne za x w φ.

1. $t = t$ (R1) x/t
2. $\varphi[x/t] \Rightarrow t = t \wedge \varphi[x/t]$ RZ 1
3. $t = t \wedge \varphi[x/t] \Rightarrow \exists x(x = t \wedge \varphi)$ aks. (TL1e)
4. $\varphi[x/t] \Rightarrow \exists x(x = t \wedge \varphi)$ RZ 2, 3
5. $x = t \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow \varphi[x/t])$ (TR2)
6. $x = t \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi[x/t])$ RZ 5
7. $x = t \wedge \varphi \Rightarrow \varphi[x/t]$ RZ 6
8. $\exists x(x = t \wedge \varphi) \Rightarrow \varphi[x/t]$ DD$\exists$ 7, aks. (TL2e), RZ
9. (TR3) RZ 4, 8