Elementy logiki

Klasyczny rachunek zdań

Wojciech Buszkowski

Zakład Teorii Obliczeń
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

1. Spójniki logiczne

Zdaniem w sensie logicznym nazywamy wyrażenie, które jest *prawdziwe* lub *fałszywe*.

Poznań leży nad Wartą, 2+2=4, 1<2 - zdania prawdziwe

Poznań leży nad Wisłą, 2+2=5, 1>2 - zdania fałszywe

W języku naturalnym zdania w sensie logicznym mają formę zdań oznajmujących, nie pytajnych, ani rozkazujących.

Prawdę i fałsz nazywamy wartościami logicznymi.

Prawdę oznaczamy symbolem 1, a fałsz symbolem 0. Inne oznaczenia: V, F (łac. veritas, falsum) oraz T, F (ang. truth, falsehood).

Zmienne zdaniowe p, q, r, s (także z indeksami) reprezentują dowolne zdania.

Spójniki logiczne (albo: funktory KRZ) służą do konstrukcji zdań logicznie złożonych. Wyróżniamy pięć podstawowych spójników logicznych.

Spójnik negacji: wyrażenie *nieprawda, że*, w kontekście *nieprawda, że p*. Symbol: $\neg$, w kontekście: $\neg p$.

Spójnik koniunkcji: wyraz *i*, w kontekście *p i q*. Symbol: $\wedge$, w kontekście: $p \wedge q$.

Spójnik alternatywy: wyraz *lub*, w kontekście *p lub q*. Symbol: $\vee$, w kontekście: $p \vee q$.

Spójnik implikacji: wyrażenie *jeżeli ..., to*, w kontekście *jeżeli p, to q*. Symbol $\Rightarrow$, w kontekście: $p \Rightarrow q$.

Spójnik równoważności: wyrażenie *wtedy i tylko wtedy, gdy* użyte w kontekście *p wtedy i tylko wtedy, gdy q*. Symbol: $\Leftrightarrow$, w kontekście: $p \Leftrightarrow q$.

Zdanie postaci $\neg p$ nazywamy *negacją zdania* p. Zdanie postaci $p \wedge q$ nazywamy *koniunkcją zdań* p i q; podobnie dla pozostałych spójników.

Inne oznaczenia spójników logicznych: spójnik negacji $\sim$, koniunkcji $\&$, $\cdot$, alternatywy $+$, implikacji $\rightarrow$, równoważności $\leftrightarrow$, $\equiv$. Koniunkcję nazywamy też iloczynem logicznym, a alternatywę sumą logiczną.

Zdanie p nazywamy argumentem spójnika negacji w zdaniu $\neg p$. Spójnik negacji jest jednoargumentowy.

Zdania p i q nazywamy argumentami spójnika koniunkcji w zdaniu $p \wedge q$. Spójnik koniunkcji jest dwuargumentowy. Spójniki alternatywy, implikacji i równoważności są też dwuargumentowe.

W przypadku implikacji, lewy argument nazywamy *poprzednikiem*, a prawy *następnikiem*.

Spójniki logiczne są ekstensjonalne: wartość logiczna zdania złożonego za pomocą danego spójnika jest jednoznacznie wyznaczona przez ten spójnik i wartości logiczne argumentów.

Negacja zdania prawdziwego jest zdaniem fałszywym. Negacja zdania fałszywego jest zdaniem prawdziwym.

Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba argumenty są prawdziwe.

Alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden argument jest prawdziwy.

Implikacja dwóch zdań (zdanie warunkowe) jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik jest fałszywy.

Równoważność dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba argumenty mają tę samą wartość logiczną.

Tablice prawdziwościowe spójników

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Jeżeli zdanie $p \Rightarrow q$ jest prawdziwe, to mówimy, że zdanie *q wynika* ze zdania p. Zauważmy, że $0 \Rightarrow p$ jest prawdą dla dowolnego p, a więc ze zdania fałszywego wynika dowolne zdanie. Podobnie, $p \Rightarrow 1$ jest prawdą dla dowolnego p, a więc zdanie prawdziwe wynika z dowolnego zdania.

Implikację określoną w powyższy sposób nazywamy *implikacją materialną*, a opowiadający jej stosunek wynikania *wynikaniem materialnym*. Nie są one w pełni zgodne z rozumieniem zwrotu 'jeżeli ..., to' w języku naturalnym. Mówiąc 'jeżeli p, to q' mamy zwykle na myśli jakiś głębszy związek między tymi zdaniami, np. wynikanie na gruncie pewnej wiedzy (teorii), albo związek przyczynowy.

W matematyce i innych naukach ścisłych implikacja materialna jest powszechnie stosowana. Gdy matematyk mówi, że warunek $W2$ wynika z warunku $W1$, to ma na myśli, że implikacja $W1 \Rightarrow W2$ jest prawdziwa w powyższym sensie.

2. Formuły KRZ

Formuły KRZ to wyrażenia poprawnie zbudowane ze zmiennych zdaniowych za pomocą spójników logicznych. W formułach zawierających kilka spójników stosujemy nawiasy, żeby jednoznacznie określić argumenty każdego spójnika.

Przykład. Wyrażenie $p \wedge q \vee r$ nie jest poprawnie zbudowaną formułą. Wprowadzając nawiasy, otrzymujemy dwie istotnie różne formuły: $(p \wedge q) \vee r$ oraz $p \wedge (q \vee r)$.

Niektóre nawiasy możemy pominąć, przyjmując priorytety (siłę wiązania) spójników. Najsilniejszy jest spójnik negacji, słabsze są spójniki koniunkcji i alternatywy (równosilne), a najsłabsze spójniki implikacji i równoważności (równosilne).

$p \wedge q \Rightarrow \neg p \vee q$ przedstawia formułę $(p \wedge q) \Rightarrow ((\neg p) \vee q)$.

Formuły KRZ nazywamy też schematami zdaniowymi KRZ.

Definicja 1. Niech V będzie pewnym zbiorem zmiennych zdaniowych. *Wartościowaniem* zbioru V nazywamy dowolną funkcję $w : V \mapsto \{0, 1\}$.

Mniej formalnie: wartościowanie jest to przyporządkowanie wartości logicznych pewnym zmiennym zdaniowym.

Każde wartościowanie w zbioru V jednoznacznie określa wartość logiczną dowolnej formuły KRZ, której zmienne należą do V.

Literami $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ oznaczamy dowolne formuły KRZ. Nie są to zmienne zdaniowe, tylko zmienne języka matematyki, w którym opisujemy rachunek zdań (tzw. *metajęzyka*).

Wartość logiczną formuły φ dla wartościowania w oznaczamy przez $W(\varphi, w)$. Tę wartość obliczamy na podstawie tablic prawdziwościowych spójników.

Przykład. $\varphi = p \vee q \Rightarrow p \wedge q$, $w(p) = 1$, $w(q) = 0$. W poniższym obliczeniu $\Rightarrow'$, $\vee'$, $\wedge'$ oznaczają działania na wartościach logicznych, które odpowiadają spójnikom $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$.

$W(\varphi, w) = (1 \vee' 0) \Rightarrow' (1 \wedge' 0) = 1 \Rightarrow' 0 = 0$

W ten sposób możemy wyznaczyć wartość logiczną dowolnego zdania logicznie złożonego, jeżeli znane są wartości logiczne wszystkich składowych zdań logicznie prostych.

Przykład. Zdanie: *jeżeli nieprawda, że Poznań leży nad Wisłą, to jeżeli Poznań leży nad Wartą, to przez Poznań przepływa rzeka.*

p - *Poznań leży nad Wisłą*, q - *Poznań leży nad Wartą*, r - *przez Poznań przepływa rzeka.*

Logiczny schemat zdania: $\varphi = \neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Wartościowanie: $w(p) = 0$, $w(q) = w(r) = 1$.

$W(\varphi, w) = \neg' 0 \Rightarrow' (1 \Rightarrow' 1) = 1 \Rightarrow' 1 = 1$. Zatem zdanie jest prawdziwe.

Liczba wszystkich wartościowań n zmiennych wynosi 2^n.

Tablica prawdziwościowa formuły: $\varphi = p \vee \neg q \Rightarrow \neg p \wedge r$.

p	q	r	$\neg q$	$\neg p$	$p \vee \neg q$	$\neg p \wedge r$	φ
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0

3. Tautologie KRZ

Definicja 2. *Tautologią KRZ* nazywamy formułę KRZ, która przyjmuje wartość logiczną 1 dla każdego wartosciowania (zmiennych występujących w tej formule).

Tautologie KRZ są logicznymi schematami zdań logicznie prawdziwych, tzn. prawdziwych na mocy samej logiki, niezależnie od wartości logicznych składowych zdań prostych.

Przykład. Zdanie *Poznań leży nad Wartą* jest prawdziwe, ale nie jest logicznie prawdziwe. Jego schemat logiczny p nie jest tautologią. Zdanie *jeżeli Poznań leży nad Wartą, to Poznań leży nad Wartą* jest logicznie prawdziwe. Jego schemat logiczny $p \Rightarrow p$ jest tautologią.

$w(p) = 1$. Wtedy $W(p \Rightarrow p, w) = 1 \Rightarrow' 1 = 1$.

$w(p) = 0$. Wtedy $W(p \Rightarrow p, w) = 0 \Rightarrow' 0 = 1$.

Definicja 3. Mówimy, że formuła φ jest *logicznie równoważna* formule ψ (w KRZ), jeżeli dla każdego wartościowania w (zmiennych występujących w tych formułach) $W(\varphi, w) = W(\psi, w)$.

Fakt 1. *φ jest logicznie równoważne ψ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią.*

Dowód. Oczywiście dla dowolnego wartościowania w:

$W(\varphi, w) = W(\psi, w)$ wtw, gdy $W(\varphi \Leftrightarrow \psi, w) = 1$.

Stąd wynika równoważność warunków:

(L) dla każdego wartościowania w $W(\varphi, w) = W(\psi, w)$,

(P) dla każdego wartościowania w $W(\varphi \Leftrightarrow \psi, w) = 1$,

co kończy dowód faktu. q.e.d.

Prawa łączności koniunkcji, alternatywy i równoważności:

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$

Prawa przemienności koniunkcji, alternatywy i równoważności:

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

Na mocy praw łączności możemy pomijać nawiasy w formułach $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ oraz $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$.

Na mocy praw łączności i przemienności kolejność występowania zmiennych nie wpływa na wartość logiczną takich formuł.

Podobnie dla $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ i $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$.

Prawa idempotentności koniunkcji i alternatywy:

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

$p \vee p \Leftrightarrow p$

Prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy i alternatywy względem koniunkcji:

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Pierwsze prawo rozdzielności przypomina arytmetyczne prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$

lecz drugie prawo rozdzielności nie ma odpowiednika w arytmetyce.

Prawa De Morgana:

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Prawo podwójnej negacji: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

Prawo transpozycji: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Na mocy tego prawa, zdanie postaci $p \Rightarrow q$ jest logicznie równoważne zdaniu postaci $\neg q \Rightarrow \neg p$. Zamiast dowodzić pierwszego możemy dowodzić drugie; jest to *dowód nie wprost* pierwszego zdania.

Prawo eksportacji-importacji: $[p \wedge q \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

Prawa definiowania jednych spójników przez inne:

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Na mocy tego prawa, twierdzenie postaci $p \Leftrightarrow q$ jest logicznie równoważne koniunkcji dwóch implikacji. Aby udowodnić takie twierdzenie, często dowodzimy kolejno obie implikacje.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$, $\;p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Prawa z ustalonym argumentem:

$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$, $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$, $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$, $p \vee 0 \Leftrightarrow p$

$(1 \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$, $(0 \Rightarrow p) \Leftrightarrow 1$, $(p \Rightarrow 1) \Leftrightarrow 1$, $(p \Rightarrow 0) \Leftrightarrow \neg p$

$(p \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow p$, $(p \Leftrightarrow 0) \Leftrightarrow \neg p$

Parę zdań, z których jedno jest negacją drugiego, nazywamy zdaniami *sprzecznymi*.

Prawo wyłączonego środka: $p \vee \neg p$

Zasada wyłączonego środka: Z dwóch zdań sprzecznych przynajmniej jedno jest prawdziwe.

Prawo sprzeczności: $\neg(p \wedge \neg p)$

Zasada sprzeczności: Z dwóch zdań sprzecznych przynajmniej jedno jest fałszywe.

Definicja 4. Mówimy, że wartościowanie w *spełnia* formułę φ, jeżeli $W(\varphi, w) = 1$. Formułę nazywamy *spełnialną*, jeżeli istnieje wartościowanie, które spełnia tę formułę. Zbiór formuł nazywamy *spełnialnym*, jeżeli istnieje wartościowanie, które spełnia wszystkie formuły z tego zbioru (tzn. *spełnia ten zbiór*).

Fakt 2. *Formuła φ jest spełnialna wtw, gdy formuła $\neg\varphi$ nie jest tautologią. Formuła φ jest tautologią wtw, gdy formuła $\neg\varphi$ nie jest spełnialna.*

Definicja 5. Mówimy, że formuła φ *logicznie wynika* ze zbioru formuł S (w KRZ), jeżeli każde wartościowanie spełniające zbiór S spełnia formułę φ.

Fakt 3. *Formuła φ logicznie wynika ze zbioru formuł S wtw, gdy zbiór $S \cup \{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny.*

Fakt 4. *Formuła ψ logicznie wynika ze zbioru $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ wtw, gdy formuła $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$ jest tautologią.*

Prawo odrywania: $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Prawo odrzucania: $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

Prawo sylogizmu hipotetycznego: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Prawa symplifikacji: $p \wedge q \Rightarrow p, \;\; p \wedge q \Rightarrow q$

Prawa addycji: $p \Rightarrow p \vee q, \;\; q \Rightarrow p \vee q$

Każda tautologia postaci $\varphi \Leftrightarrow \psi$ wyznacza dwie tautologie $\varphi \Rightarrow \psi$ i $\psi \Rightarrow \varphi$.

Logiczne wynikanie zapisujemy też w postaci schematów wnioskowania:

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi},$$

gdzie formuły $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ nazywamy przesłankami, a formułę ψ wnioskiem. Schemat wnioskowania nazywamy logiczną regułą wnioskowania KRZ, jeżeli wniosek logicznie wynika z przesłanek (tzn. ze zbioru przesłanek).

Reguła odrywania (nazwa łacińska: *modus ponens*)

$$\text{(MP)}\ \frac{p \Rightarrow q,\ p}{q}$$

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Reguła sylogizmu hipotetycznego:

$$\text{(SYL)}\ \frac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$$

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$$

Reguła odrzucania:

$$\frac{p \Rightarrow q,\ \neg q}{\neg p}$$

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Reguła wprowadzania równoważności:

$$\frac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q}$$

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \\ \hline p \Leftrightarrow q \end{array}$$

Wnioskowaniem nazywamy układ zdań, złożony z przesłanek (założeń) $Z_1, \ldots, Z_n$ i wniosku Z.

Zazwyczaj wnioskowanie formułujemy tak. Wypisujemy kolejno przesłanki, a potem wniosek, poprzedzony zwrotem 'zatem' (albo 'więc', 'przeto', 'wobec tego', 'w konsekwencji' itp.).

Wnioskowanie nazywamy *dedukcyjnym* (na gruncie KRZ), jeżeli wniosek wynika logicznie z przesłanek, tzn. schemat wniosku wynika logicznie (w KRZ) ze schematów przesłanek.

Wtedy sama logika gwarantuje prawdziwość wniosku, pod warunkiem, że prawdziwe są wszystkie przesłanki.

Przykład. Wnioskowanie: Jeżeli Jan studiuje matematykę, to zalicza analizę matematyczną. Jan studiuje matematykę. Zatem Jan zalicza analizę matematyczną.

To wnioskowanie jest dedukcyjne, ponieważ jego schemat pokrywa się z (MP), czyli pewną logiczną regułą wnioskowania KRZ.

Tautologie i logiczne reguły wnioskowania KRZ są zamknięte ze względu na podstawianie dowolnych formuł za zmienne zdaniowe.

Przez $\varphi[p_1/\varphi_1, \ldots, p_n/\varphi_n]$ oznaczamy wynik podstawiania w formule φ formuły φ_i za zmienną p_i dla $i = 1, \ldots, n$.

Przykład. $(p \Rightarrow p \vee q)[p/q,\ q/q \vee r] = q \Rightarrow q \vee q \vee r$.

UWAGA: $\varphi[p/\psi, q/\chi]$ jest na ogół różne od $\varphi[p/\psi][q/\chi]$.

$(p \Rightarrow p \vee q)[p/q][q/q \vee r] = (q \Rightarrow q \vee q)[q/q \vee r] = q \vee r \Rightarrow q \vee r \vee q \vee r$

Dlatego podstawianie $\varphi[p_1/\varphi_1, \ldots, p_n/\varphi_n]$ nazywamy też *podstawianiem równoczesnym*, w odróżnieniu od *kolejnego podstawiania* $\varphi[p_1/\varphi_1] \cdots [p_n/\varphi_n]$.

UWAGA: Jeżeli zmienna p_i nie występuje w formule φ, to po prostu ignorujemy podstawienie p_i/φ_i.

$(p \Rightarrow q)[p/r,\ r/s] = r \Rightarrow q$

Fakt 5. *Jeżeli φ jest tautologią KRZ, to dla wszelkich zmiennych $p_1, \ldots, p_n$ i formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ formuła $\varphi[p_1/\varphi_1, \ldots, p_n/\varphi_n]$ jest tautologią KRZ.*

Zamiast dowodu rozważymy jeden przykład.

Przykład. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ jest tautologią.

Formuła $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$ powstaje z poprzedniej przez podstawienie $[p/\varphi, q/\psi]$.

Obliczając wartość logiczną drugiej formuły dla jakiegokolwiek wartościowania w, musimy najpierw obliczyć wartości logiczne $W(\varphi, w)$ i $W(\psi, w)$.

Dalsze obliczenie wygląda tak samo, jak obliczenie wartości logicznej pierwszej formuły dla wartościowania w' takiego, że $w'(p) = W(\varphi, w)$, $w'(q) = W(\psi, w)$. Musimy otrzymać 1, skoro pierwsza formuła jest tautologią.

Zatem druga formuła ma wartość 1 dla każdego wartościowania.

Fakt 6. *Jeżeli ψ logicznie wynika ze zbioru $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, to dla każdego podstawienia $\sigma = [p_1/\varphi_1, \ldots, p_m/\varphi_m]$ formuła $\psi\sigma$ logicznie wynika ze zbioru $\{\psi_1\sigma, \ldots, \psi_n\sigma\}$.*

Dowód. Zakładamy, że ψ logicznie wynika z $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$.

Na mocy faktu 4, formuła $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \Rightarrow \psi$ jest tautologią.

Na mocy faktu 5, $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \Rightarrow \psi)\sigma$ jest tautologią.

Mamy: $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \Rightarrow \psi)\sigma = \psi_1\sigma \wedge \cdots \wedge \psi_n\sigma \Rightarrow \psi\sigma$.

Na mocy faktu 4, $\psi\sigma$ logicznie wynika ze zbioru $\{\psi_1\sigma, \ldots, \psi_n\sigma\}$.
q.e.d.

Przykład. Skoro MP jest logiczną regułą wnioskowania, to jest nią też każdy schemat:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi,\ \varphi}{\psi}$$

4. Postacie normalne formuł

Formuły p i $\neg p$, gdzie p jest dowolną zmienną zdaniową, nazywamy literałami; p jest literałem *pozytywnym*, a $\neg p$ *negatywnym*.

Alternatywa elementarna jest to alternatywa skończenie wielu literałów, np. $p \vee \neg q \vee r$, $\neg q$.

Koniunkcja elementarna jest to koniunkcja skończenie wielu literałów, np. $p \wedge \neg q \wedge r$, $\neg q$.

Formuła w koniunkcyjnej postaci normalnej (KPN) jest to koniunkcja skończenie wielu alternatyw elementarnych, np. $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$, także jedna alternatywa el.

Formuła w alternatywnej postaci normalnej (APN) jest to alternatywa skończenie wielu koniunkcji elementarnych, np. $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$, także jedna koniunkcja el.

Twierdzenie 1. *Każda formuła KRZ jest logicznie równoważna pewnej formule w KPN i pewnej formule w APN.*

Przykład. $\varphi = p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge \neg r$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	φ	APN	KPN
1	1	1	1	0	0	0		$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
1	1	0	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge \neg r$	
1	0	1	0	0	0	1	$p \wedge \neg q \wedge r$	
1	0	0	0	1	0	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	
0	1	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	
0	1	0	0	1	1	0		$p \vee \neg q \vee r$
0	0	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	
0	0	0	0	1	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	

APN: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

KPN: $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Przypadki szczególne:

(1) $W(\varphi, w) = 0$ dla każdego wartościowania w. Wtedy φ jest logicznie równoważne formule $p \wedge \neg p$, która jest w APN.

(2) $W(\varphi, w) = 1$ dla każdego wartościowania w. Wtedy φ jest logicznie równoważne formule $p \vee \neg p$, która jest w KPN.

Sprowadzanie do APN i KPN metodą przekształceń równoważnościowych.

Podformuły danej formuły zastępujemy równoważnymi formułami, stosując następujące prawa (zastępujemy lewą stronę prawą stroną).

$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$

$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$, $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$

$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi)$, $(\psi \vee \chi) \wedge \varphi \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi)$

$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$, $(\psi \wedge \chi) \vee \varphi \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi)$

Przykład. Sprowadzamy formułę $p \vee q \Leftrightarrow q \wedge \neg r$ do KPN.

$[p \vee q \Rightarrow q \wedge \neg r] \wedge [q \wedge \neg r \Rightarrow p \vee q]$

$[\neg(p \vee q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge [\neg(q \wedge \neg r) \vee (p \vee q)]$

$[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge [\neg q \vee r \vee p \vee q]$ (negacyjna postać normalna)

$[(\neg p \wedge \neg q) \vee q] \wedge [(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r] \wedge [\neg q \vee r \vee p \vee q]$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r \vee p \vee q)$

Sprowadzamy tę formułę do APN. Powtarzamy trzy pierwsze kroki i kontynuujemy.

$\{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge \neg q\} \vee \{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge r\} \vee$
$\{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge p\} \vee \{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge q\}$

$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r \wedge r) \vee$
$(\neg p \wedge \neg q \wedge p) \vee (q \wedge \neg r \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge q) \vee (q \wedge \neg r \wedge q)$

Twierdzenie 2. *Formuła w KPN jest tautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdej składowej alternatywie elementarnej występuje para przeciwnych literałów (tzn. $p, \neg p$ dla pewnej zmiennej p).*

Dowód. Twierdzenie wynika z dwóch faktów.

(1) Formuła $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ jest tautologią wtw, gdy każda formuła φ_i jest tautologią.

(2) Alternatywa elementarna jest tautologią wtw, gdy występuje w niej para przeciwnych literałów.

(1) jest oczywiste. Dowodzimy (2). Jeżeli w alternatywie el. występują przeciwne literały, to dla każdego wartościowania jeden z nich ma wartość 1, czyli alternatywa ma wartość 1. W przeciwnym przypadku, zawsze można znaleźć wartościowanie, dla którego wszystkie literały mają wartość 0, czyli alternatywa ma wartość 0. Np. $p \vee \neg q \vee r$ ma wartość 0 dla $w(p) = 0$, $w(q) = 1$, $w(r) = 0$. q.e.d.

Twierdzenie 3. *Formuła w APN jest niespełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy w każdej składowej koniunkcji elementarnej występuje para przeciwnych literałów.*

Przykład. $p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r$. Sprowadzamy tę formułę do KPN.

Pomijamy kroki pośrednie. Otrzymujemy:

$(\neg p \vee \neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q \vee r)$

Formuła jest tautologią.

Sprowadzamy $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ do APN. Otrzymujemy:

$(p \wedge \neg p) \vee p$

Formuła jest spełnialna, ponieważ druga koniunkcja el., czyli p, nie zawiera przeciwnych literałów.

5. Formalne systemy dedukcyjne dla KRZ

Przedstawimy system dedukcyjny KRZ w stylu Fregego-Hilberta.

Niektóre tautologie KRZ przyjmujemy jako aksjomaty. Wszystkie pozostałe tautologie i wszystkie logiczne reguły wnioskowania KRZ można wyprowadzić z tych aksjomatów, posługując się dwiema regułami dowodzenia: *regułą odrywania* i *regułą podstawiania*.

$$\text{(MP)}\ \frac{\varphi \Rightarrow \psi;\ \varphi}{\psi},\quad \text{(SUB)}\ \frac{\varphi}{\varphi\sigma}$$

Te reguły przyjmujemy dla wszelkich formuł φ, ψ i każdego podstawienia σ. Jeżeli przesłanki tych reguł są tautologiami, to wniosek jest tautologią.

Aksjomaty implikacji

(A1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (prawo poprzednika)

(A2) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ (prawo Fregego)

Aksjomat negacji

(A3) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (odwrotne prawo transpozycji)

Aksjomaty koniunkcji

(A4) $p \wedge q \Rightarrow p$, (A5) $p \wedge q \Rightarrow q$ (prawa symplifikacji)

(A6) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)]$ (prawo mnożenia następników)

Aksjomaty alternatywy

(A7) $p \Rightarrow p \vee q$, (A8) $q \Rightarrow p \vee q$ (prawa addycji)

(A9) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)]$ (prawo dodawania poprzedników)

Aksjomaty równoważności

(A10) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, (A11) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(A12) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)]$

Dowód formalny można przedstawić jako skończony ciąg formuł, w którym każda formuła jest aksjomatem systemu lub wnioskiem z poprzednich formuł na mocy reguł dowodzenia systemu. Ostatnia formuła tego ciągu jest dowodzonym twierdzeniem. Twierdzenia systemów formalnych nazywamy też tezami.

(T1) $p \Rightarrow p$ (prawo tożsamości)

1. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ (A2)

2. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)]$ SUB 1 $[r/p]$

3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (A1)

4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$ MP 2,3

5. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$ SUB 4 $[q/q \Rightarrow p]$

6. $p \Rightarrow p$ MP 5,3

(T2) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)]$ (A6)

2. $(p \wedge q \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow q \wedge p)]$ SUB 1 $[p/p \wedge q, r/p]$

3. $p \wedge q \Rightarrow q$ (A5)

4. $(p \wedge q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow q \wedge p)$ MP 2,3

5. $p \wedge q \Rightarrow p$ (A4)

6. $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$ MP 4,5

7. $q \wedge p \Rightarrow p \wedge q$ SUB 6 $[p/q, q/p]$

8. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)]$ (A12)

9. $(p \wedge q \Rightarrow q \wedge p) \Rightarrow [(q \wedge p \Rightarrow p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p)]$ SUB 8 $[p/p \wedge q, q/q \wedge p]$

10. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $2\times$ MP 9, 6, 7

Tezy tego systemu pokrywają się z tautologiami KRZ.

Jest to tzw. *twierdzenie o pełności* dla tego systemu.

Ponieważ wszystkie aksjomaty systemu są tautologiami (co łatwo sprawdzić), a reguły dowodzenia zachowują tautologiczność, więc każda teza systemu jest tautologią.

Trudniej wykazać, że każda tautologia jest tezą tego systemu. Znane są różne dowody tego faktu. W książce: T. Batóg, “Podstawy logiki” można znaleźć dowód, wykorzystujący formuły w KPN.

Wprawdzie system w tej książce jest trochę inny (zamiast (A3) przyjmuje trzy aksjomaty negacji), lecz łatwo wykazać, że jego tezy pokrywają się z tezami naszego systemu. (A3) jest tezą tamtego systemu, a trzy aksjomaty negacji tamtego systemu są tezami naszego systemu.

Przedstawimy system sekwentowy dowodzenia praw KRZ. W takich systemach procedura poszukiwania dowodu może być całkowicie zautomatyzowana.

Sekwent: skończona lista formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, interpretowana jako alternatywa $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$.

Aksjomaty: wszystkie sekwenty zawierające parę sprzecznych formuł $\varphi, \neg\varphi$ (na dowolnych miejscach).

Reguły dowodzenia:

$$(\mathrm{R}\,\neg\neg)\ \frac{X, \varphi, Y}{X, \neg\neg\varphi, Y}$$

$$(\mathrm{R}\,\wedge)\ \frac{X, \varphi, Y;\ \ X, \psi, Y}{X, \varphi \wedge \psi, Y} \quad (\mathrm{R}\,\neg\wedge)\ \frac{X, \neg\varphi, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \wedge \psi), Y}$$

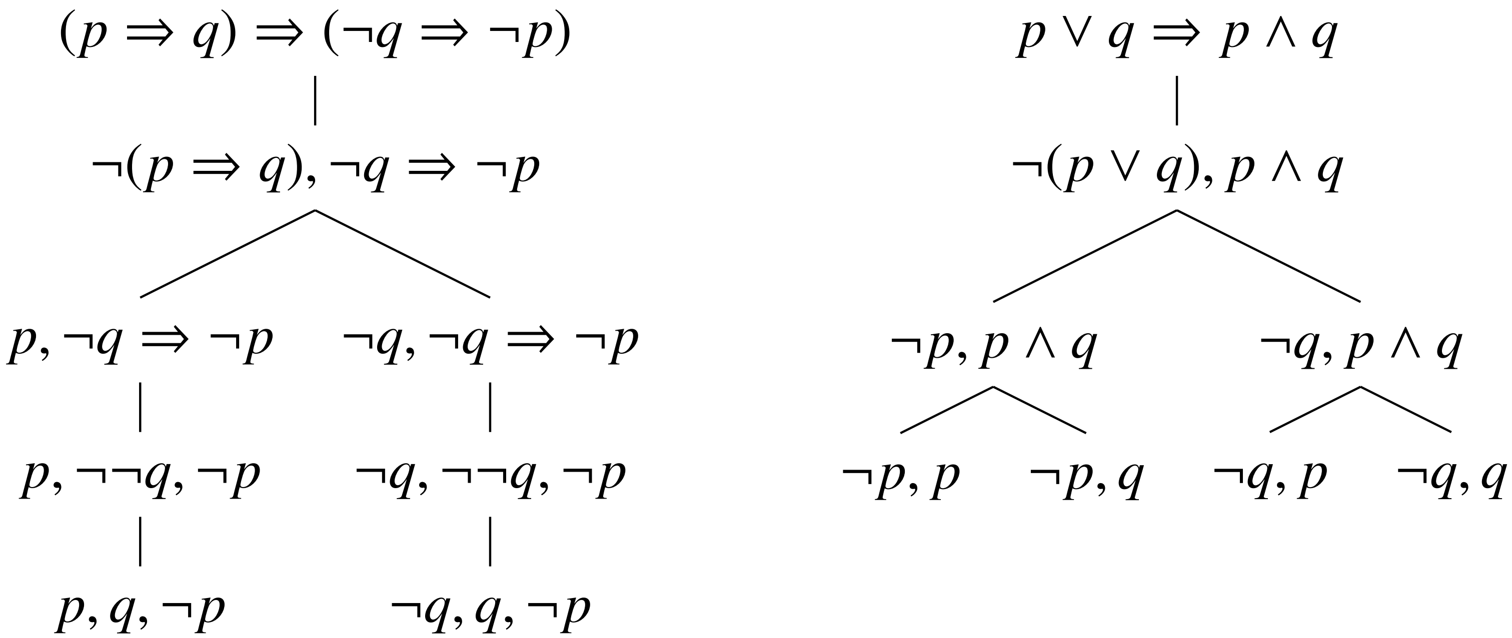
$$(\mathrm{R} \vee)\ \frac{X, \varphi, \psi, Y}{X, \varphi \vee \psi, Y} \quad (\mathrm{R}\neg\vee)\ \frac{X, \neg\varphi, Y;\ \ X, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \vee \psi), Y}$$

$$(\mathrm{R} \Rightarrow)\ \frac{X, \neg\varphi, \psi, Y}{X, \varphi \Rightarrow \psi, Y} \quad (\mathrm{R}\neg \Rightarrow)\ \frac{X, \varphi, Y;\ \ X, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \Rightarrow \psi), Y}$$

$$(\mathrm{R} \Leftrightarrow)\ \frac{X, \neg\varphi, \psi, Y;\ \ X, \varphi, \neg\psi, Y}{X, \varphi \Leftrightarrow \psi, Y} \quad (\mathrm{R} \neg \Leftrightarrow)\ \frac{X, \varphi, \psi, Y;\ \ X, \neg\varphi, \neg\psi, Y}{X\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi), Y}$$

W tych regułach litery X, Y oznaczają dowolne *konteksty*, czyli skończone listy formuł (mogą być puste).

W przypadku reguły z jedną przesłanką wniosek jest logicznie równoważny tej przesłance; w przypadku reguły z dwiema przesłankami wniosek jest logicznie równoważny koniunkcji przesłanek (listy interpretujemy jako alternatywy).



Formuła w korzeniu drzewa jest logicznie równoważna koniunkcji wszystkich alternatyw elementarnych na liściach drzewa. Zatem nasz system może służyć do sprowadzania formuł do KPN.

Z lewej strony: drzewo dowodu prawa $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Z prawej strony: poszukiwanie dowodu formuły $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$ zakończyło się porażką, ponieważ dwa sekwenty elementarne na liściach drzewa nie są aksjomatami.

6. Funkcje boolowskie

Definicja 6. Niech $n \geq 1$. Funkcję $n-$argumentową, której argumenty i wartości są wartościami logicznymi 0,1, nazywamy $n-$argumentową *funkcją boolowską*.

Inne nazwy: funkcja logiczna, funkcja przełączająca.

Funkcje boolowskie są stosowane w elektronice jako funkcje przetwarzania sygnałów (stanów). 1 to stan czynny (sygnał, prąd płynie), 0 to stan bierny (brak sygnału, prąd nie płynie).

FB_n oznacza zbiór wszystkich $n-$argumentowych funkcji boolowskich.

W tym rozdziale zmienne x, y, z (z indeksami) reprezentują wartości logiczne.

W_n oznacza zbiór wszystkich wartościowań n zmiennych. $|U|$ oznacza liczbę elementów skończonego zbioru U.

Funkcje jednoargumentowe ($n = 1$).

x	$f_0^1(x)$	$f_1^1(x)$	$f_2^1(x)$	$f_3^1(x)$
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1

$f_0^1(x) = 0$ funkcja zero

$f_1^1(x) = \neg' x$ funkcja negacji

$f_2^1(x) = x$ funkcja identycznościowa

$f_3^1(x) = 1$ funkcja jeden

Fakt 7. $|\mathrm{FB}_n| = 2^{(2^n)}$.

Dowód. W_n jest zbiorem wszystkich wartościowań zmiennych $x_1, \ldots, x_n$. Mamy $|\mathrm{W}_n| = 2^n$. Funkcje z FB_n można przedstawić jako ciągi binarne długości 2^n, co daje powyższą równość. q.e.d.

Zatem $|\mathrm{FB}_1| = 4$, $|\mathrm{FB}_2| = 16$, $|\mathrm{FB}_3| = 256$. Wypiszemy funkcje dwuargumentowe ($n = 2$).

x	y	f_0^2	f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_5^2	f_6^2	f_7^2
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	f_8^2	f_9^2	f_{10}^2	f_{11}^2	f_{12}^2	f_{13}^2	f_{14}^2	f_{15}^2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_8^2(x, y) = x \wedge' y$ funkcja koniunkcji

$f_9^2(x, y) = x \Leftrightarrow' y$ funkcja równoważności

$f_{11}^2(x, y) = x \Rightarrow' y$ funkcja implikacji

$f_{14}^2(x, y) = x \vee' y$ funkcja alternatywy

UWAGA: W elektronice stosuje się notację $x \cdot y$ albo xy zamiast $x \wedge' y$, $x + y$ zamiast $x \vee' y$ i x' lub $\overline{x}$ zamiast $\neg' x$. Wyrażenie $(x \wedge' \neg' y \wedge' z) \vee' (\neg' x \wedge' y \wedge' z)$ zapisujemy $xy'z + x'yz$. Będziemy stosować tylko notację logiczną, pomijając $'$ przy spójniku.

Fakt 8. *Każdą funkcję boolowską można przedstawić jako wyrażenie w APN i jako wyrażenie w KPN.*

Dowód. Tak jest, ponieważ do funkcji boolowskich możemy zastosować poznaną wcześniej metodę wyznaczania APN i KPN za pomocą tablicy. q.e.d.

Przedstawiamy w ten sposób cztery pierwsze funkcje dwuargumentowe.

$f_0^2(x, y) = x \wedge \neg x = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$

$f_1^2(x, y) = \neg x \wedge \neg y = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$

$f_2^2(x, y) = \neg x \wedge y = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee y)$

$f_3^2(x, y) = (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y)$

Wyrażenie w APN dla $f_3^2(x, y)$ można uprościć, stosując prawa algebry logiki:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \;\; x \vee \neg x = 1, \;\; x \wedge 1 = x$$

$$f_3^2(x, y) = \neg x \wedge (y \vee \neg y) = \neg x \wedge 1 = \neg x$$

Definicja 7. Niech f będzie $n-$argumentową funkcją boolowską, a F zbiorem funkcji boolowskich. Mówimy, że funkcja f jest *przedstawialna* przez funkcje ze zbioru F, jeżeli istnieje wyrażenie $E(x_1, \ldots, x_n)$, zbudowane z symboli funkcji ze zbioru F i zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ (niekoniecznie wszystkich), i takie, że równość

$$f(x_1, \ldots, x_n) = E(x_1, \ldots, x_n)$$

jest prawdziwa dla wszystkich wartościowań zmiennych (czyli jest tożsamością w algebrze logiki).

Definicja 8. Zbiór funkcji boolowskich F nazywamy *zupełnym*, jeżeli każda funkcja boolowska jest przedstawialna przez funkcje ze zbioru F.

Zbiór $\{\neg, \wedge, \vee\}$ jest zupełny.

Można ograniczyć się do dwóch funkcji.

Fakt 9. Zbiory $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ i $\{\neg, \Rightarrow\}$ są zupełne.

Zbiór $\{\neg, \wedge\}$ jest zupełny, ponieważ dowolną funkcję boolowską można przedstawić w KPN, a następnie wyeliminować alternatywę, stosując prawa:

$$x_1 \vee \cdots \vee x_k = \neg(\neg x_1 \wedge \cdots \wedge \neg x_k)$$

Zbiór $\{\neg, \vee\}$ jest zupełny, ponieważ każdą funkcję boolowską możemy przedstawić w APN, a następnie wyeliminować koniunkcję, stosując prawa:

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_k = \neg(\neg x_1 \vee \cdots \vee \neg x_k)$$

Przykład. $f(x, y) = x \Leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$ (APN).

Stąd $f(x, y) = \neg(\neg x \vee \neg y) \vee \neg(x \vee y)$.

Także $f(x, y) = (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$ (KPN).

Stąd $f(x, y) = \neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg(y \wedge \neg x)$.

Wykażemy zupełność zbioru $\{\neg, \Rightarrow\}$.

Z tożsamości $x \Rightarrow y = \neg x \vee y$ otrzymujemy $x \vee y = \neg x \Rightarrow y$ (podstawiamy $x/\neg x$, usuwamy podwójną negację i przestawiamy strony tożsamości).

Każdą funkcję boolowską można przedstawić przez funkcje $\neg, \vee$. W takim wyrażeniu eliminujemy kolejno wszystkie wystąpienia $\vee$, posługując się powyższą definicją $\vee$ przez $\neg, \Rightarrow$.

Przykład. $f(x, y, z) = x \Rightarrow y \wedge z$.

$f(x, y, z) = x \Rightarrow \neg(\neg y \vee \neg z) = x \Rightarrow \neg(y \Rightarrow \neg z)$

Jak wykazać, że zbiór funkcji nie jest zupełny?

Definicja 9. Mówimy, że funkcja boolowska *zachowuje* 1 (odp. 0), jeżeli przyjmuje wartość 1 (odp. 0) dla wartościowania, które przypisuje 1 (odp. 0) każdej zmiennej.

Przykład. Funkcje $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ zachowują 1, ponieważ $1 \wedge 1 = 1$, $1 \vee 1 = 1$ itd. Funkcje $\wedge, \vee$ zachowują 0, ale funkcje $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ nie zachowują 0. Funkcja $\neg$ nie zachowuje ani 1, ani 0.

Fakt 10. *Jeżeli wszystkie funkcje ze zbioru F zachowują 1 (odp. 0), to każda funkcja przedstawialna przez funkcje ze zbioru F zachowuje 1 (odp. 0).*

Dowód. Każdą funkcję przedstawialną przez funkcje z F możemy otrzymać z funkcji z F i funkcji rzutowania $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ stosując wielokrotnie operację złożenia funkcji:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Operacja złożenia prowadzi od funkcji $f, g_1, \ldots, g_k$ zachowujących 1 (odp. 0) do funkcji h zachowującej 1 (odp. 0). Funkcje rzutowania zachowują 1 (odp. 0). Zatem, jeżeli każda funkcja z F zachowuje 1 (odp. 0), to każda funkcja otrzymana w ten sposób też zachowuje 1 (odp. 0). q.e.d.

Wniosek. Żaden zbiór funkcji zachowujących 1 (odp. 0) nie jest zupełny.

Na przykład, zbiory $\{\wedge, \vee\}$, $\{\wedge, \Rightarrow\}$ nie są zupełne.

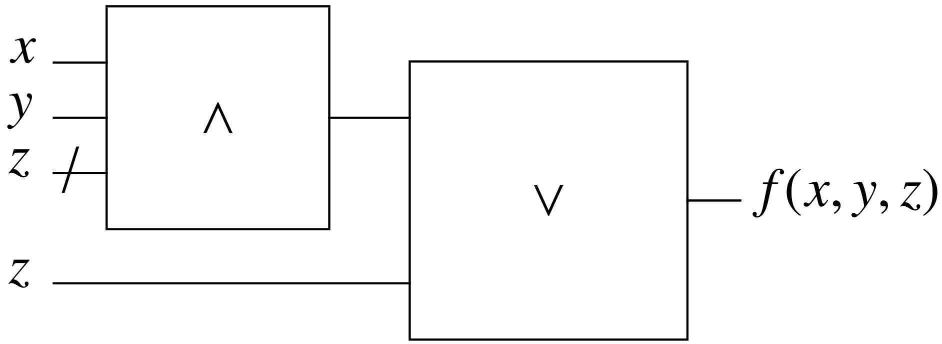
Istnieją dwie funkcje $f \in \mathrm{FB}_2$ takie, że zbiór $\{f\}$ jest zupełny.

$$x \uparrow y = \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y, \;\; x \,|\, y = \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

Funkcję $\uparrow$ nazywamy *strzałką Sheffera* lub funkcją NAND, a funkcję $|$ *binegacją* lub funkcją NOR.

Mamy: $\neg x = \neg(x \wedge x) = x \uparrow x$ i $x \wedge y = \neg(x \uparrow y) = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$. Ponieważ każdą funkcję boolowską można przedstawić przez $\neg, \wedge$, więc każdą funkcję boolowską można przedstawić przez $\uparrow$. Dla $|$ postępujemy podobnie.

Przykład. $f(x, y, z) = x \wedge y \Rightarrow z$. Przedstawiamy f przez $\neg, \wedge$:
$f(x, y, z) = \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$.
$f(x, y, z) = (x \wedge y) \uparrow \neg z = ((x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)) \uparrow (z \uparrow z)$.



Rysunek przedstawia układ logiczny dla funkcji
$f(x, y, z) = (x \wedge y \wedge \neg z) \vee z.$

Kwadraty wyobrażają tzw. elementy logiczne (bramki), obliczające (wieloczłonową) koniunkcję i alternatywę. Do bramek z lewej strony wprowadzamy sygnały. Przekreślenie sygnału zastępuje bramkę negacji. Wartość funkcji otrzymujemy na wyjściu układu.

Jest to układ APN. Podobnie można projektować układy KPN, NAND, NOR.